

# Spieltheorie



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

**Kapitel 7, 8**

**Evolutionary Game Theory**

**Modelling Network Traffic using Game Theory**

# Outline

- Spieltheorie Einführung
- Evolutionary Game Theory
- Spieltheorie in Netzwerken

## Outline

- Erstens
- Zweitens
- Drittens

# Outline

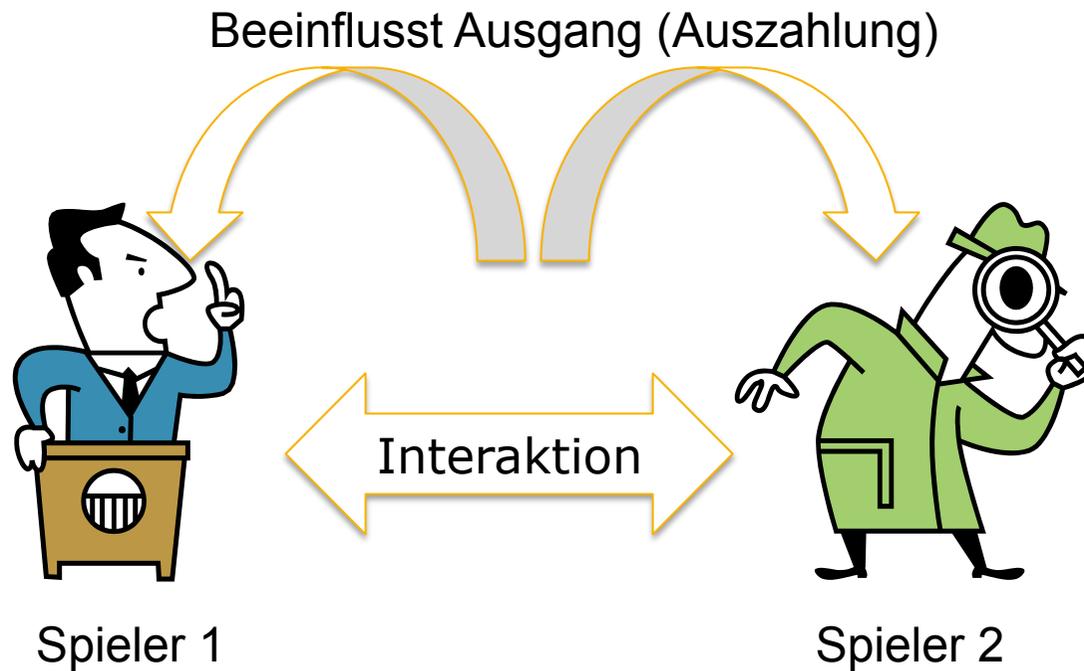
- Spieltheorie Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash Gleichgewichte
  - Mixed Strategies
- Evolutionary Game Theory
  - Evolutionär Stabile Strategie (EES)
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash Gleichgewicht
- Spieltheorie in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

## Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Spieltheorie

## Spiel



### Outline

- **GT Einführung**
  - **Das Spiel**
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Spieltheorie

## Das Gefangenen Dilemma



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Video: <http://www.youtube.com/watch?v=ED9gaAb2BEw>

### Outline

- **GT Einführung**
  - **Das Spiel**
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Spieltheorie

## Das Gefangenen Dilemma

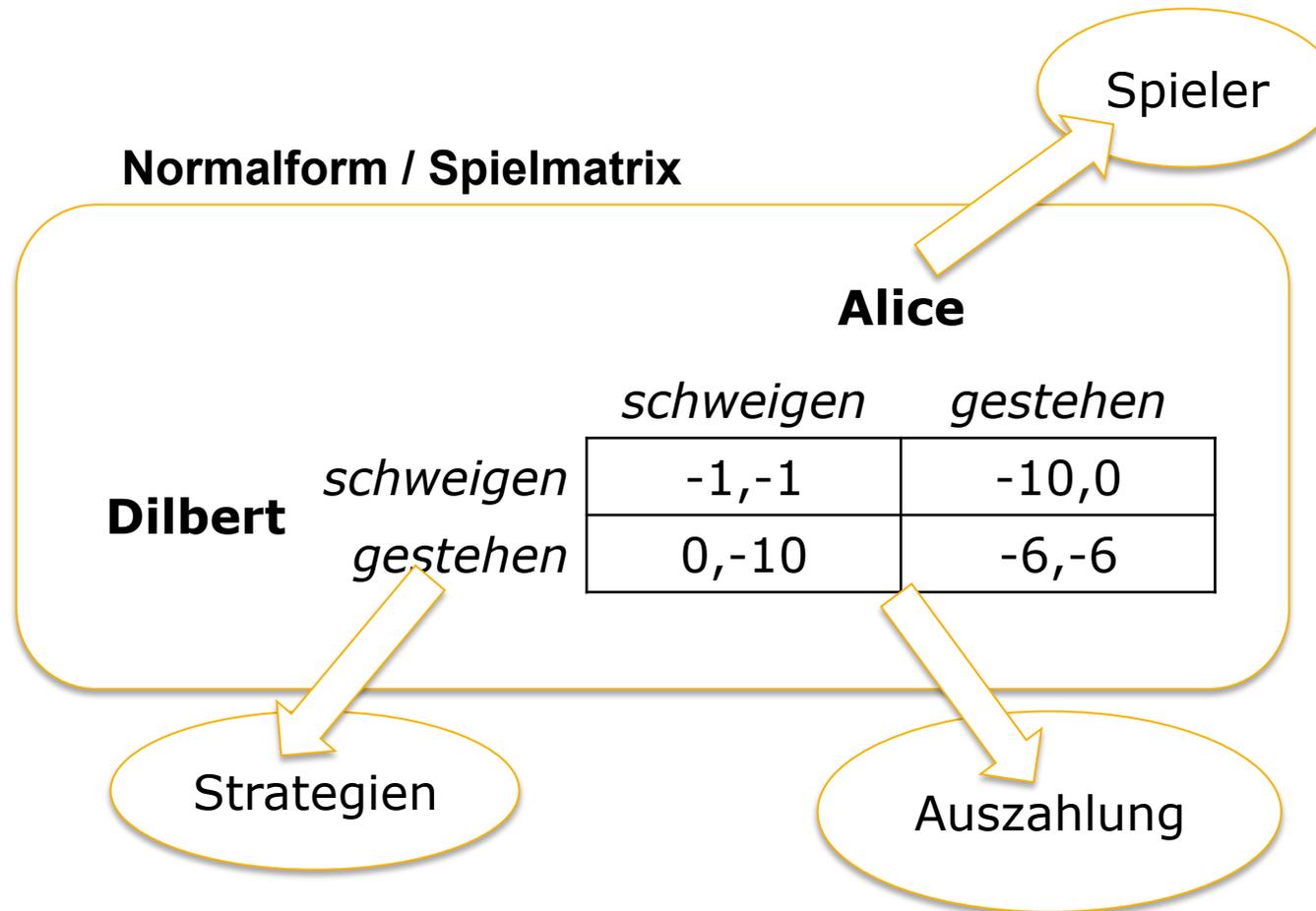
		<b>Alice</b>	
		<i>schweigen</i>	<i>gestehen</i>
<b>Dilbert</b>	<i>schweigen</i>	-1,-1	-10,0
	<i>gestehen</i>	0,-10	-6,-6

### Outline

- **GT Einführung**
  - **Das Spiel**
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Spieltheorie

## Das Gefangenen Dilemma

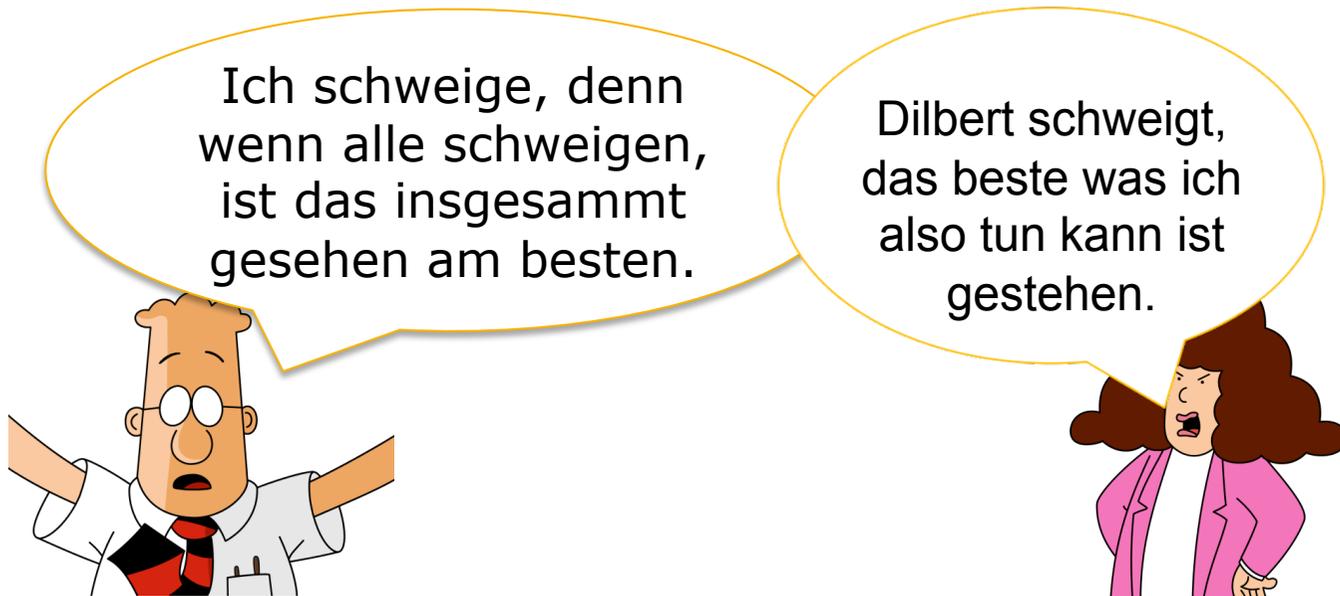


### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Spieltheorie

## Terminologie: Best Response



**Alice**

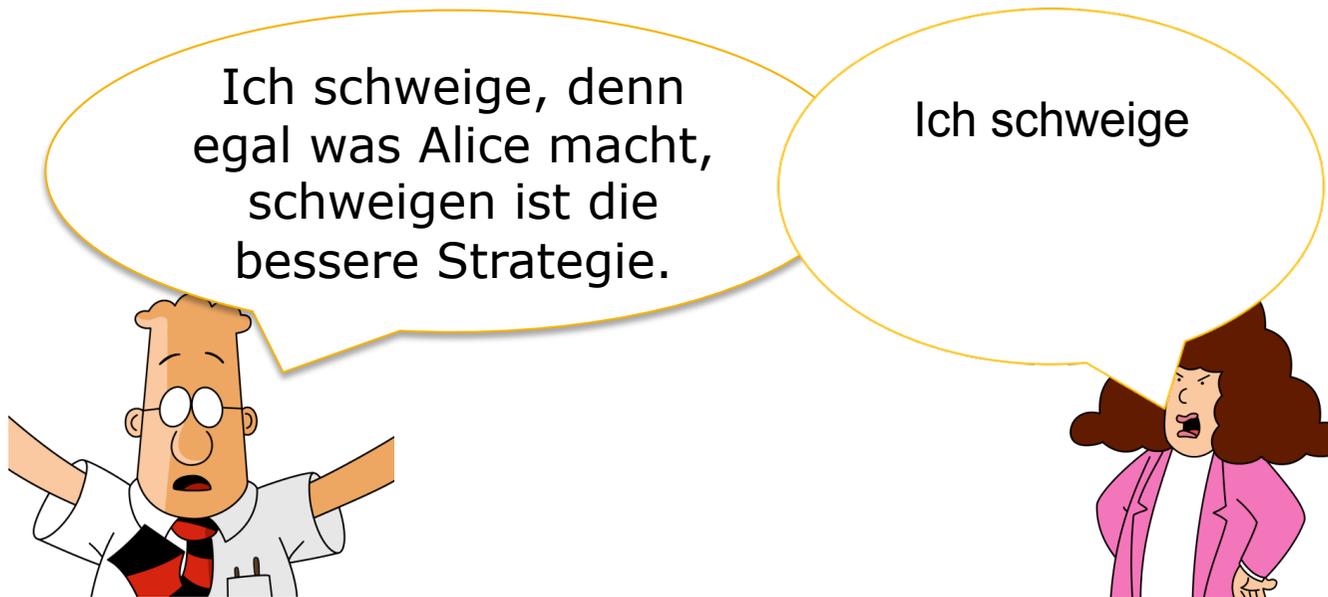
		<i>schweigen</i>	<i>gestehen</i>
		<i>schweigen</i>	-1,-1
<b>Dilbert</b>	<i>gestehen</i>	0,-10	-6,-6

### Outline

- **GT Einführung**
  - Das Spiel
  - **Terminologien**
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Spieltheorie

## Terminologie: Dominante Strategie



**Alice**

		<i>schweigen</i>	<i>gestehen</i>
<b>Dilbert</b>	<i>schweigen</i>	1,1	-5,0
	<i>gestehen</i>	0,-5	-6,-6

### Outline

- **GT Einführung**
  - Das Spiel
  - **Terminologien**
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Spieltheorie

## Terminologie: Nash Gleichgewicht

Im Nash Gleichgewicht ist **jede Strategie ein best response**.



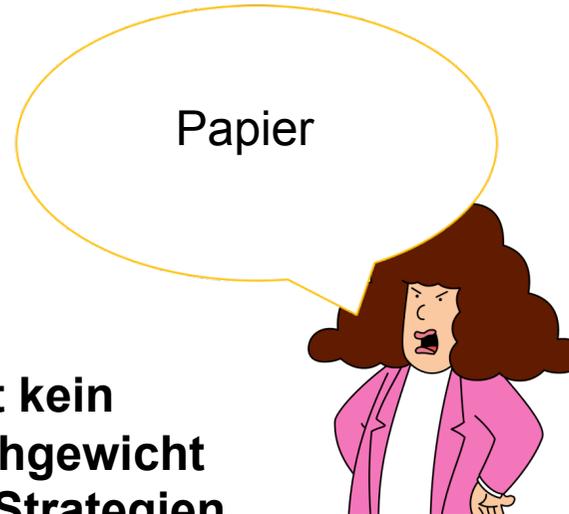
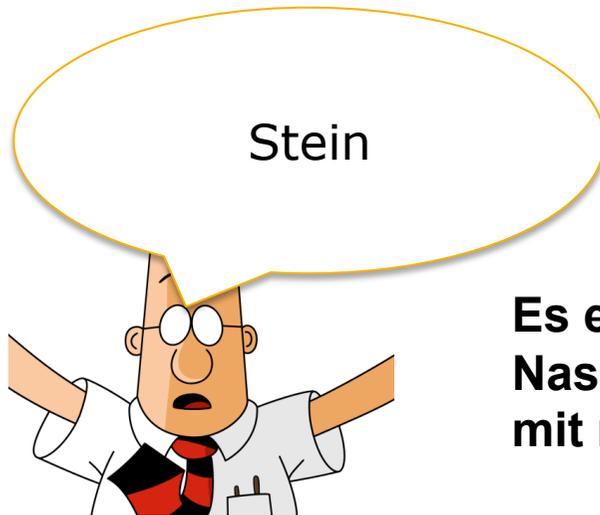
		<i>schweigen</i>	<i>gestehen</i>
		<i>schweigen</i>	<i>gestehen</i>
<b>Dilbert</b>	<i>schweigen</i>	-1,-1	-10,0
	<i>gestehen</i>	0,-10	-6,-6

### Outline

- **GT Einführung**
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - **Nash**
    - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Spieltheorie

## Terminologie: Mixed Strategys



Es existiert kein  
Nash Gleichgewicht  
mit reinen Strategien

**Alice**

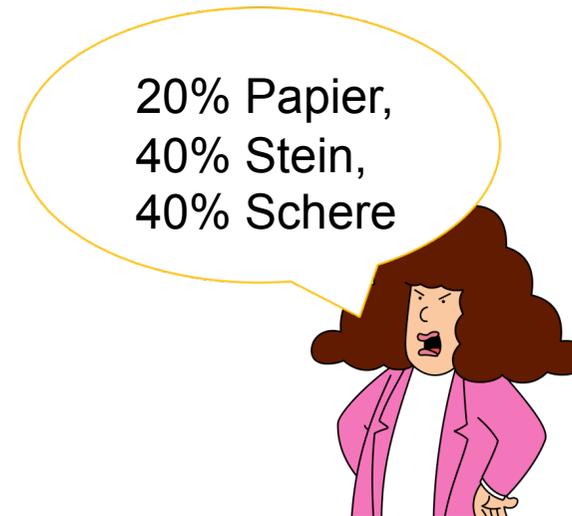
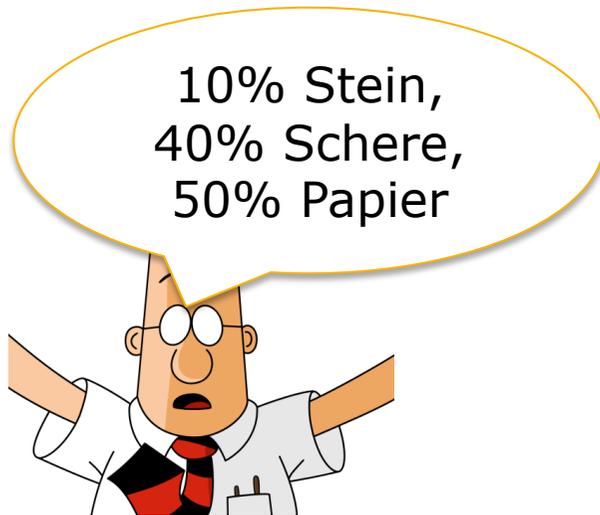
		Alice		
		Schere	Stein	Papier
Dilbert	Schere	0,0	0,1	1,0
	Stein	1,0	0,0	0,1
	Papier	0,1	1,0	0,0

### Outline

- **GT Einführung**
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - **Mixed Strategies**
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Spieltheorie

## Terminologie: Mixed Strategys



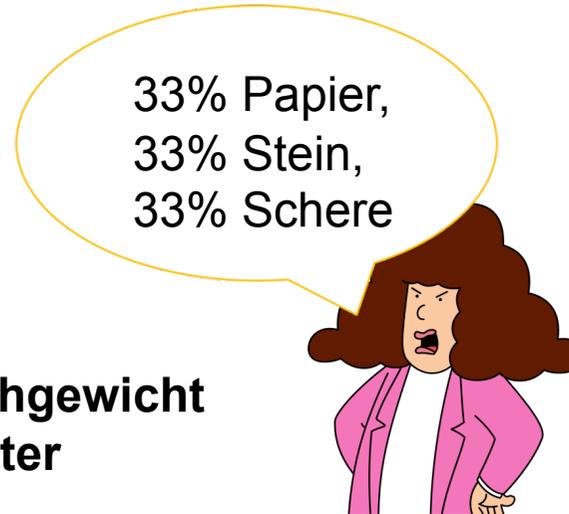
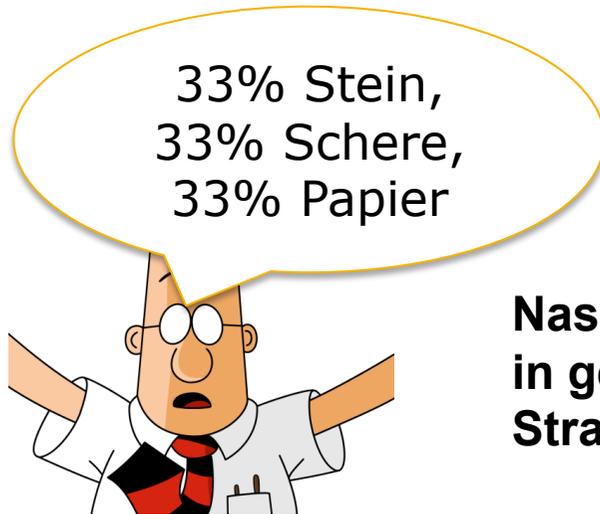
		Alice		
		Schere	Stein	Papier
Dilbert	Schere	0,0	0,1	1,0
	Stein	1,0	0,0	0,1
	Papier	0,1	1,0	0,0

### Outline

- **GT Einführung**
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - **Mixed Strategies**
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Spieltheorie

## Terminologie: Mixed Strategys



**Nash Gleichgewicht  
in gemischter  
Strategie**

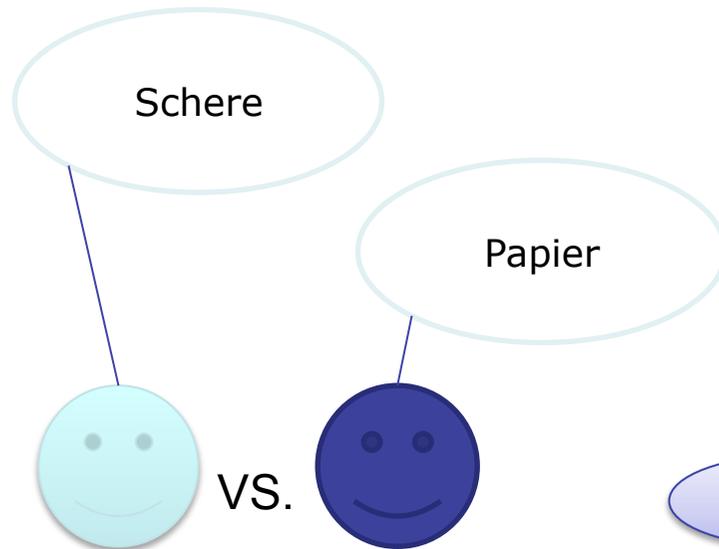
		<b>Alice</b>		
		<i>Schere</i>	<i>Stein</i>	<i>Papier</i>
<b>Dilbert</b>	<i>Schere</i>	0,0	0,1	1,0
	<i>Stein</i>	1,0	0,0	0,1
	<i>Papier</i>	0,1	1,0	0,0

### Outline

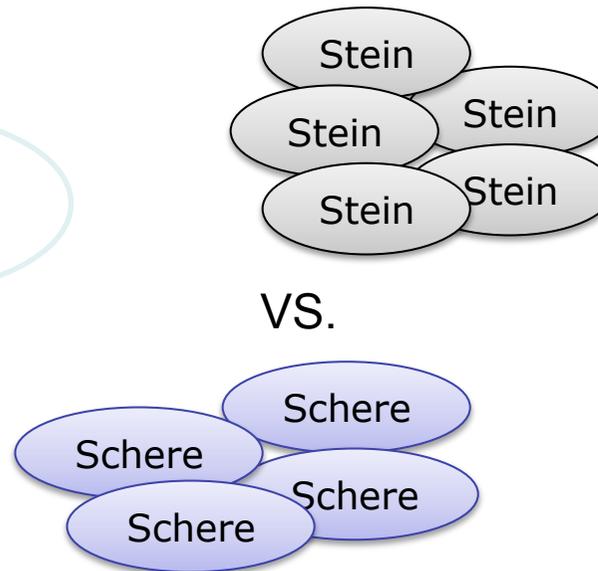
- **GT Einführung**
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - **Mixed Strategies**
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Spieltheorie



## Evolutionäre Spieltheorie

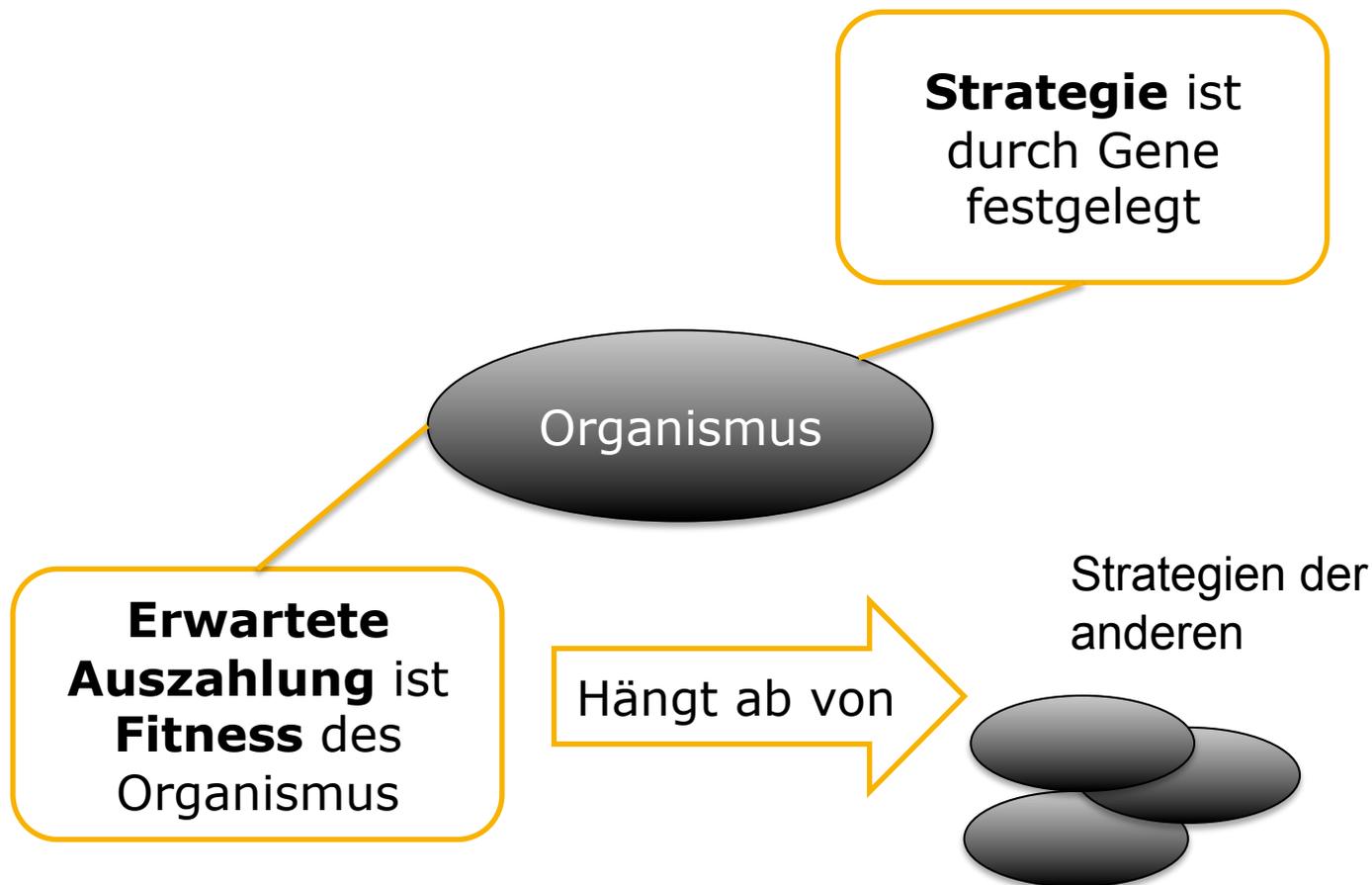


## Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Analogien



### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Beispiel: Das Körpergrößenspiel

Population von Käfern



Fitness hängt hauptsächlich  
von Essen ab

Mutation: Große Käfer



Großer Körper braucht  
mehr Nährstoffe

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Beispiel: Das Körpergrößenspiel



Wettbewerb um Nahrung



### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Beispiel: Das Körpergrößenspiel



**2. Käfer**

**1. Käfer**

	<i>klein</i>	<i>groß</i>
<i>klein</i>	5,5	1,8
<i>groß</i>	8,1	3,3



### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

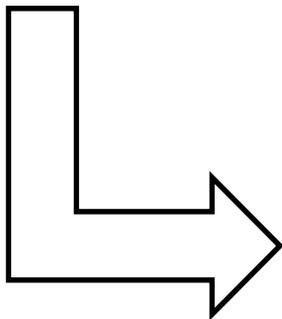
## Evolutionär Stabile Strategien



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

### Nash Gleichgewicht

Eine Wahl der Strategien, die beibehalten bleibt, sobald die Spieler diese einmal "erreicht" haben.



Analogon im evolutionären Setting

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

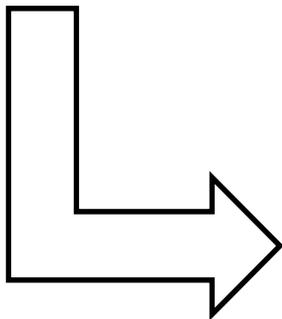
## Evolutionär Stabile Strategien



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

### Nash Gleichgewicht

Eine Wahl der Strategien, die beibehalten bleibt, sobald die Spieler diese einmal "erreicht" haben.



### Evolutionär Stabile Strategien

Genetisch bedingte Strategie, die in einer Population bestehen bleibt, wenn sie einmal die "Vorherrschaft" errungen hat.

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Evolutionär Stabile Strategien



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

### Oder Anders:

“Benutzt” die gesamte Population eine bestimmte Strategie für die gilt: “Jede kleine Gruppe an Eindringlingen, die eine andere Strategie benutzt, stirbt mit der Zeit ab”. Dann spricht man von einer **Evolutionär stabilen Strategie (ESS)**

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Evolutionär Stabile Strategien



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

### Formal:

- Die **Fitness** eines Organismus ist die **erwartete Auszahlung** bei einer Interaktion mit einem zufälligen Mitglied der Population.
- **Invasion:** Strategie T **invadiert** Strategie S auf Ebene  $x$ , für kleines  $x > 0$ , wenn ein  $x$ -tel der Population Strategie T benutzt und ein  $1-x$ -tel der Population Strategie S.
- Eine Strategie S ist **evolutionär stabil**, falls für  $y > 0$  (klein) mit  $x < y$  gilt: Für jede Strategie T, die S auf Ebene  $x$  ( $< y$ ) invadiert gilt: Die Fitness aller S-Individuen ist größer oder gleich der Fitness der T-Individuen.

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Beispiel: Evolutionär Stabile Strategie



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



1-x “benutzen” Strategie **Klein**



x “benutzen” Strategie **Groß**

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Beispiel: Evolutionär Stabile Strategie



Fittnes eines kleinen Käfers

Wahrscheinlichkeit  
kleinen Käfer zu treffen

$$5(1-x) + 1x = 5 - 4x$$

	<i>klein</i>	<i>groß</i>
<i>klein</i>	5,5	1,8
<i>groß</i>	8,1	3,3

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Beispiel: Evolutionär Stabile Strategie



$$8(1-x) + 3x = 8 - 5x$$

	<i>klein</i>	<i>groß</i>
<i>klein</i>	5,5	1,8
<i>groß</i>	8,1	3,3

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Beispiel: Evolutionär Stabile Strategie



“klein” ist nicht evolutionär stabil, da für kleine  $x$  die Fitness von groß stets größer ist als die von klein

	<i>klein</i>	<i>groß</i>
<i>klein</i>	5,5	1,8
<i>groß</i>	8,1	3,3

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Beispiel: Evolutionär Stabile Strategie



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



1-x "benutzen" Strategie **Groß**



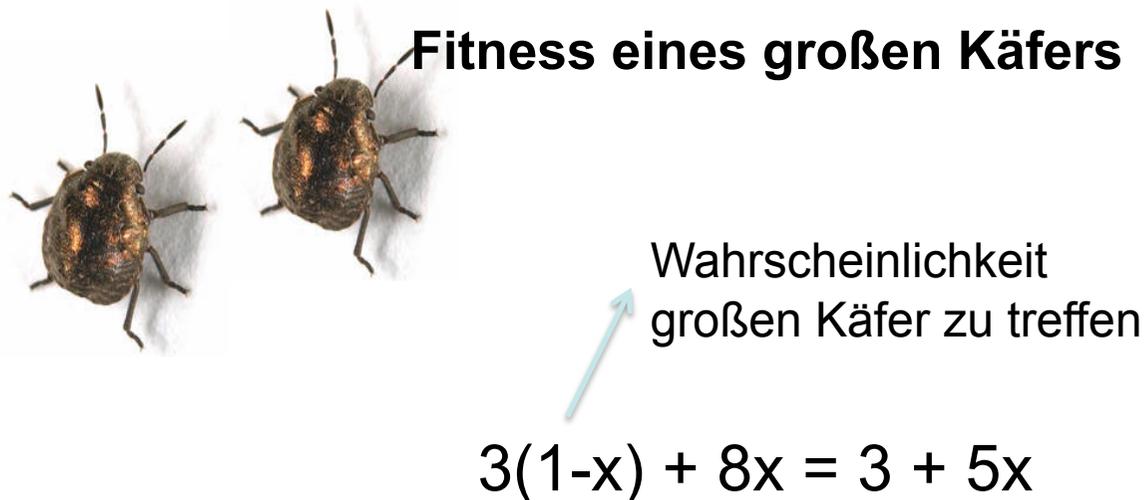
x "benutzen" Strategie **klein**

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Beispiel: Evolutionär Stabile Strategie



	<i>klein</i>	<i>groß</i>
<i>klein</i>	5,5	1,8
<i>groß</i>	8,1	3,3

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Beispiel: Evolutionär Stabile Strategie



Fitness eines kleinen Käfers

Wahrscheinlichkeit  
großen Käfer zu treffen

$$(1-x) + 5x = 1 + 4x$$

	<i>klein</i>	<i>groß</i>
<i>klein</i>	5,5	1,8
<i>groß</i>	8,1	3,3

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Beispiel: Evolutionär Stabile Strategie



“groß” ist evolutionär stabil, da für kleine  $x$  die Fitness von “groß” stets größer ist als die von “klein”

	<i>klein</i>	<i>groß</i>
<i>klein</i>	5,5	1,8
<i>groß</i>	8,1	3,3

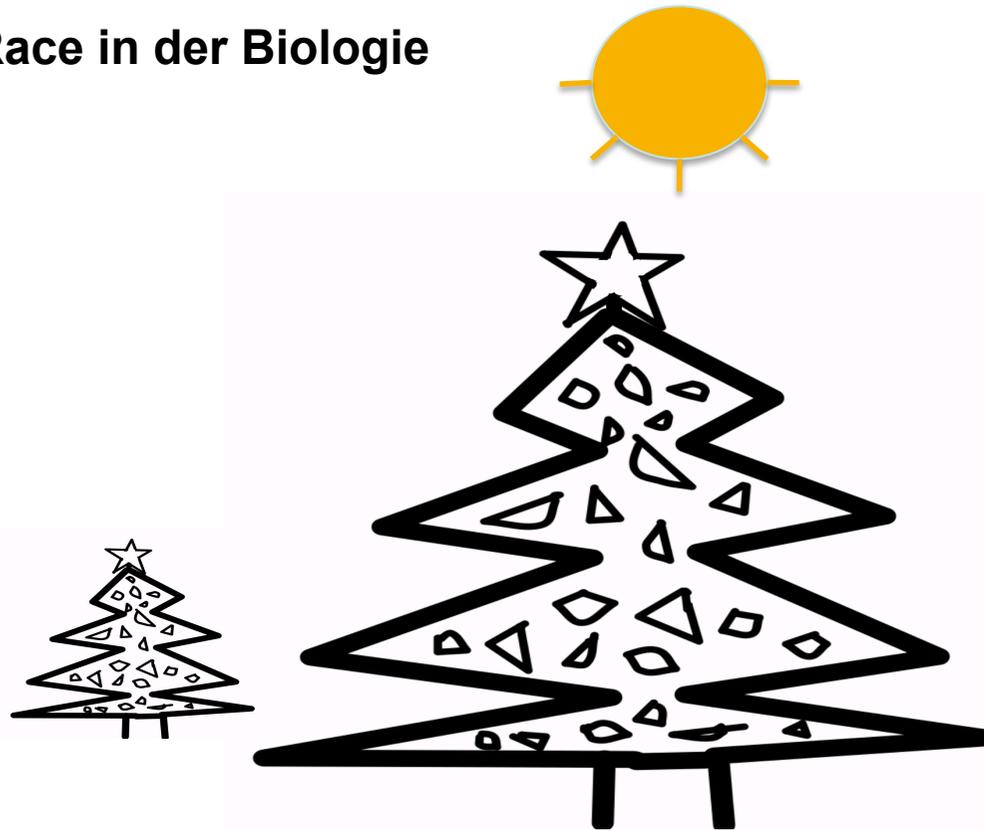
### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Empirisch nachgewiesen

### Arms Race in der Biologie



### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - **EES**
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Allgemeine Beschreibung

Strategien: S, T, (1-x) sind S-Organismen

Erwartete Auszahlung für **S**-Organismus

$$a(1-x)+bx$$

Erwartete Auszahlung für **T**-Organismus

$$c(1-x)+dx$$

S ist evolutionär stabil, falls

$$a(1-x)+bx > c(1-x)+dx$$

	S	T
S	a,a	b,c
T	c,b	d,d

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - EES
  - **Abstrakte Spiele**
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## Allgemeine Beschreibung

S ist evolutionär stabil, falls

$$a(1-x)+bx > c(1-x)+dx$$

1.  $a > c$
2.  $a = c$  und  $b > d$

	<i>S</i>	<i>T</i>
<i>S</i>	a,a	b,c
<i>T</i>	c,b	d,d

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - EES
  - **Abstrakte Spiele**
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## ESS vs. Nash



S,S ist Nash Gleichgewicht für  
**a größer gleich c**

S,S ist ESS für

1.  $a > c$
2.  $a = c$  und  $b > d$



Ist S evolutionär stabil, dann ist (S,S) ein Nash Gleichgewicht

	S	T
S	a,a	b,c
T	c,b	d,d

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- **Evolutionary GT**
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - **EES vs. Nash**
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Evolutionary Game Theory

## ESS und mixed Strategies



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

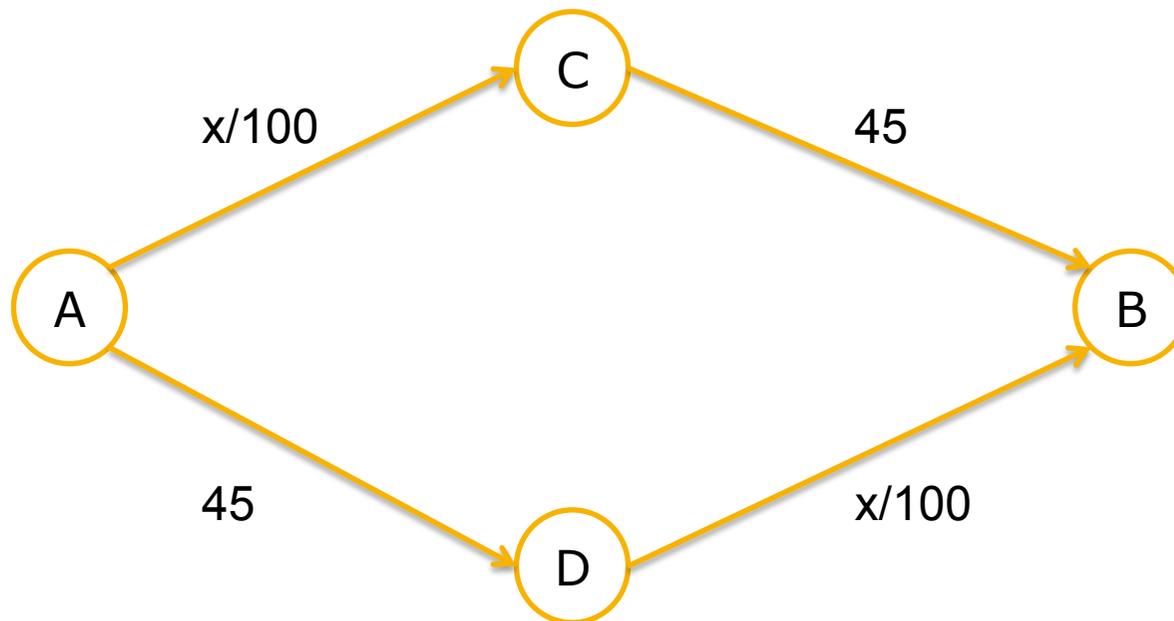
### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- GT in Netzwerken
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Game Theorie and Networks

## Equilibrium Traffic

4000 Autos wollen von A nach B



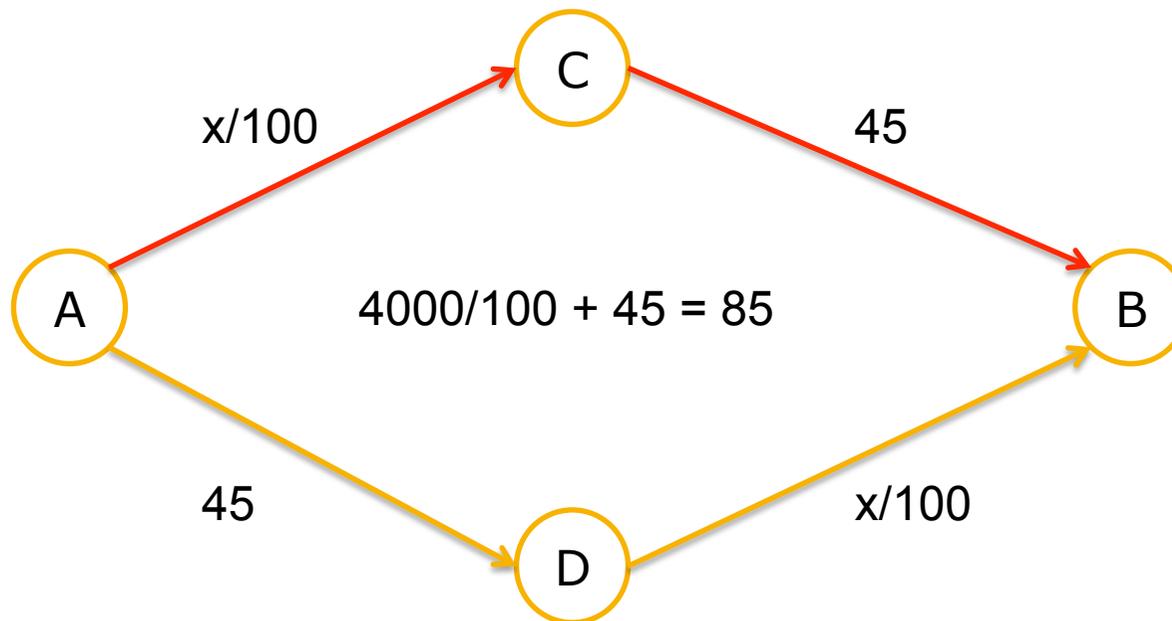
### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- **GT in Netzwerken**
  - **Einführung**
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Game Theorie and Networks

## Equilibrium Traffic

4000 Autos wollen von A nach B



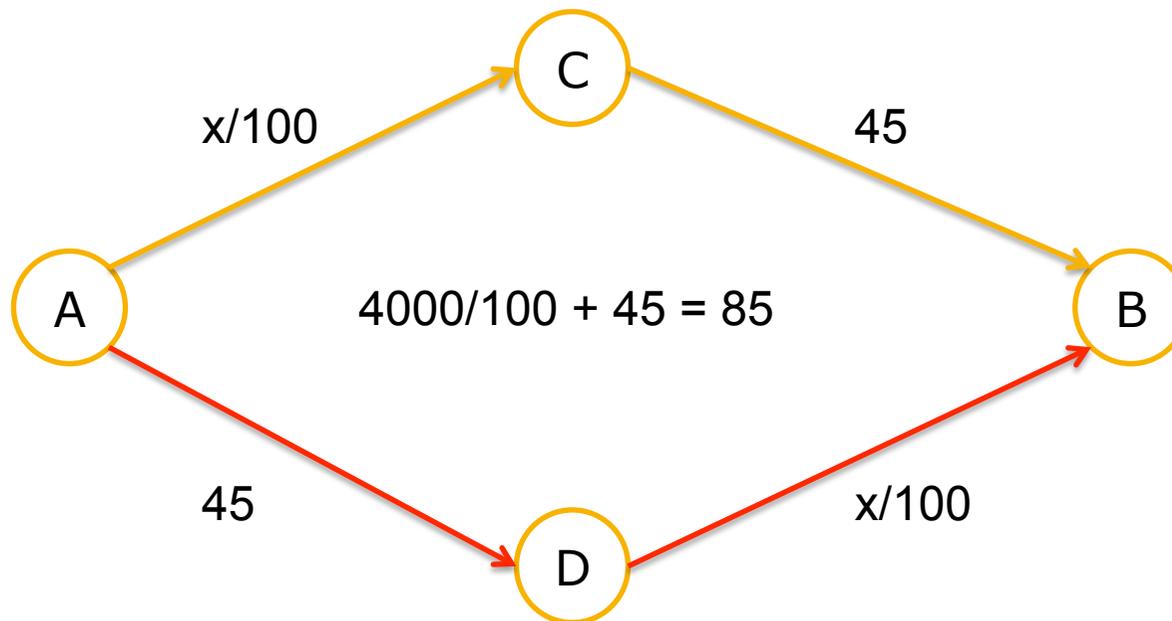
### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- **GT in Netzwerken**
  - **Einführung**
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Game Theorie and Networks

## Equilibrium Traffic

4000 Autos wollen von A nach B



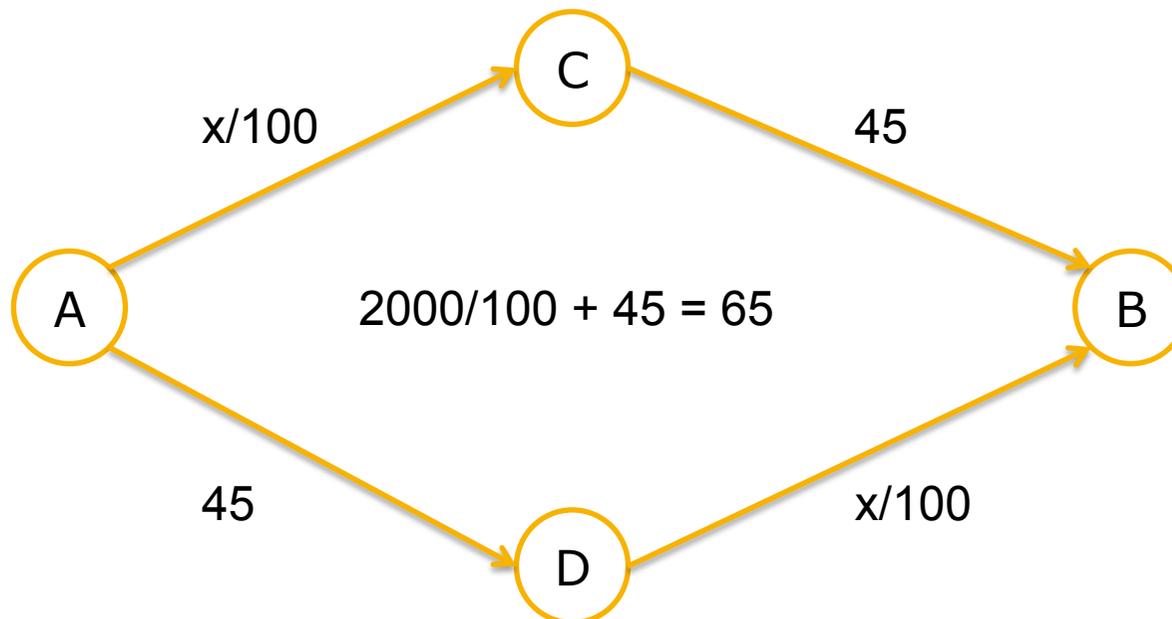
### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- **GT in Netzwerken**
  - **Einführung**
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Game Theorie and Networks

## Equilibrium Traffic

4000 Autos wollen von A nach B

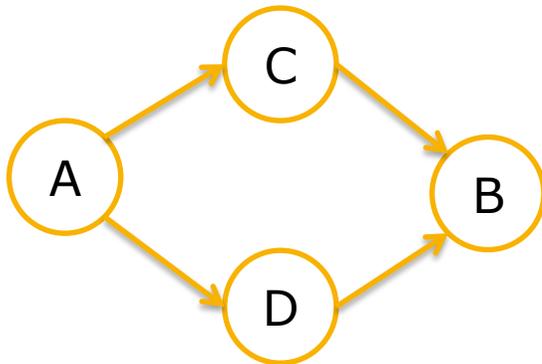


### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- **GT in Netzwerken**
  - **Einführung**
  - Gleichgewichte
  - Braess Paradox

# Game Theorie and Networks

## Equilibrium Traffic



Statt 2 Spielern  
4000

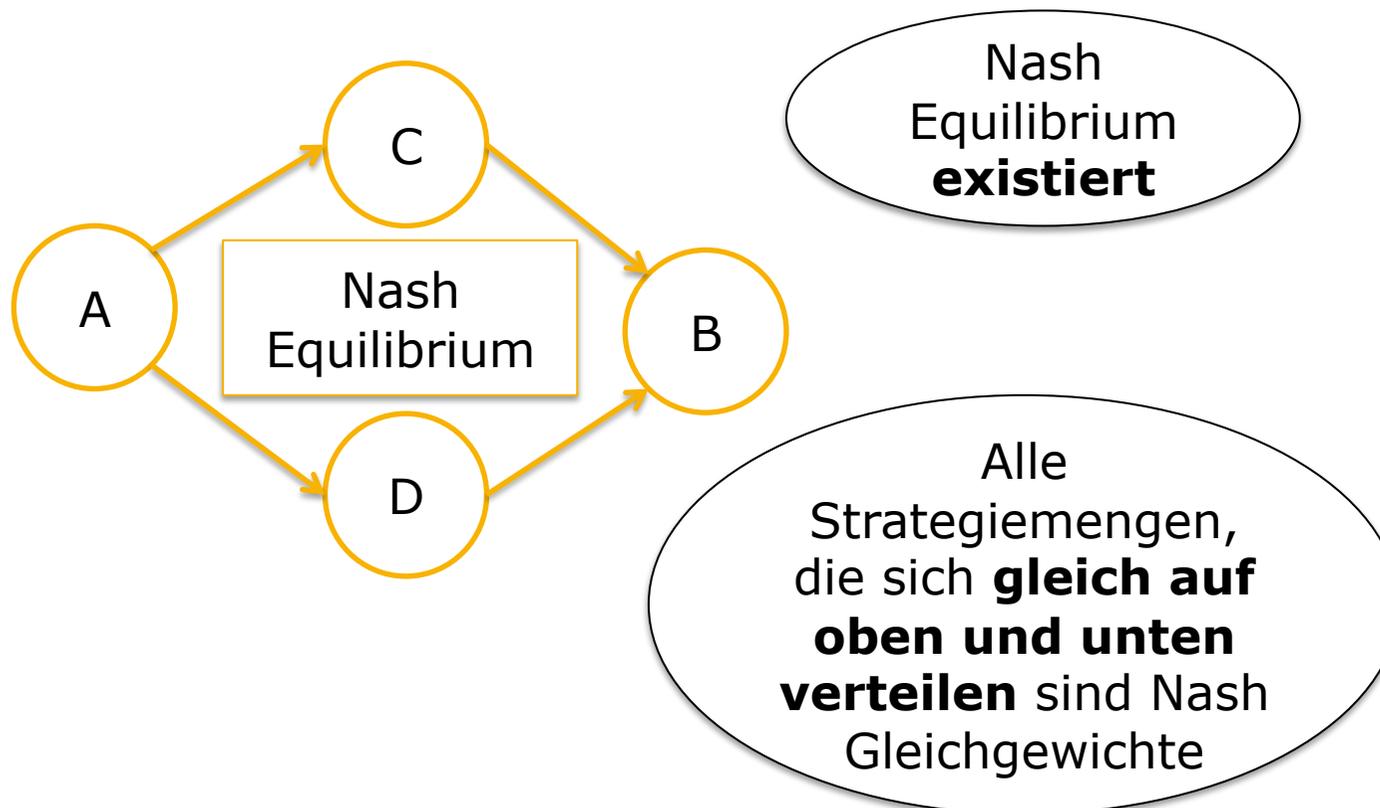
**Nash  
Equilibrium** ist  
immer noch  
Menge an Best  
Response  
Strategien

### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- **GT in Netzwerken**
  - Einführung
  - **Gleichgewichte**
  - Braess Paradox

# Game Theorie and Networks

## Equilibrium Traffic



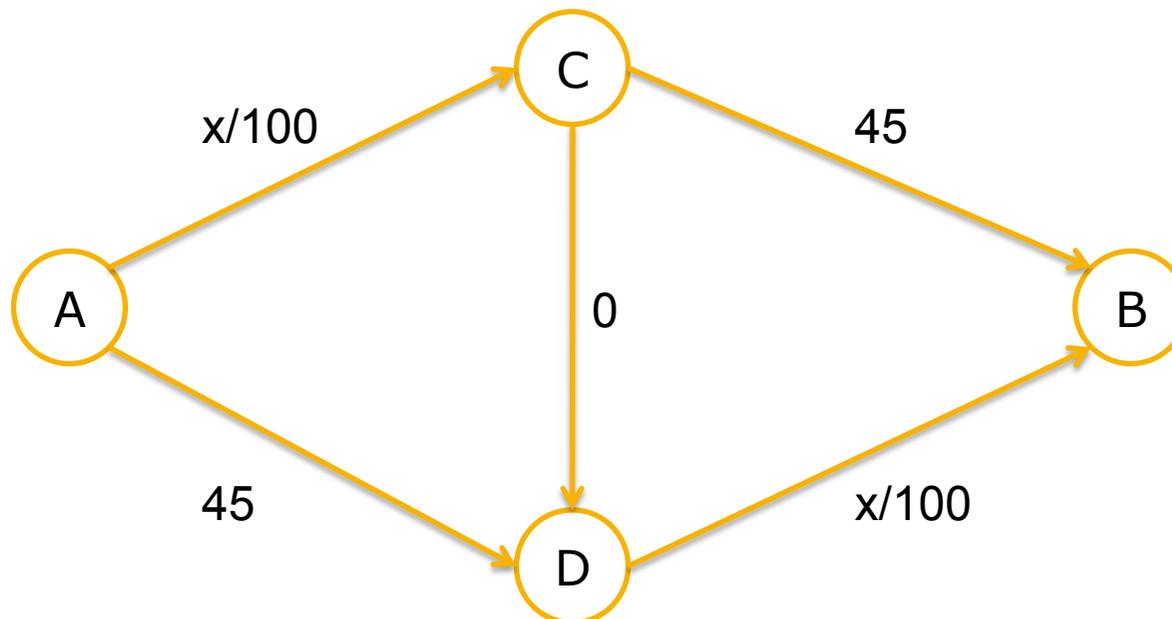
### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- **GT in Netzwerken**
  - Einführung
  - **Gleichgewichte**
  - Braess Paradox

# Game Theorie and Networks

## Braess's Paradox

4000 Autos wollen von A nach B



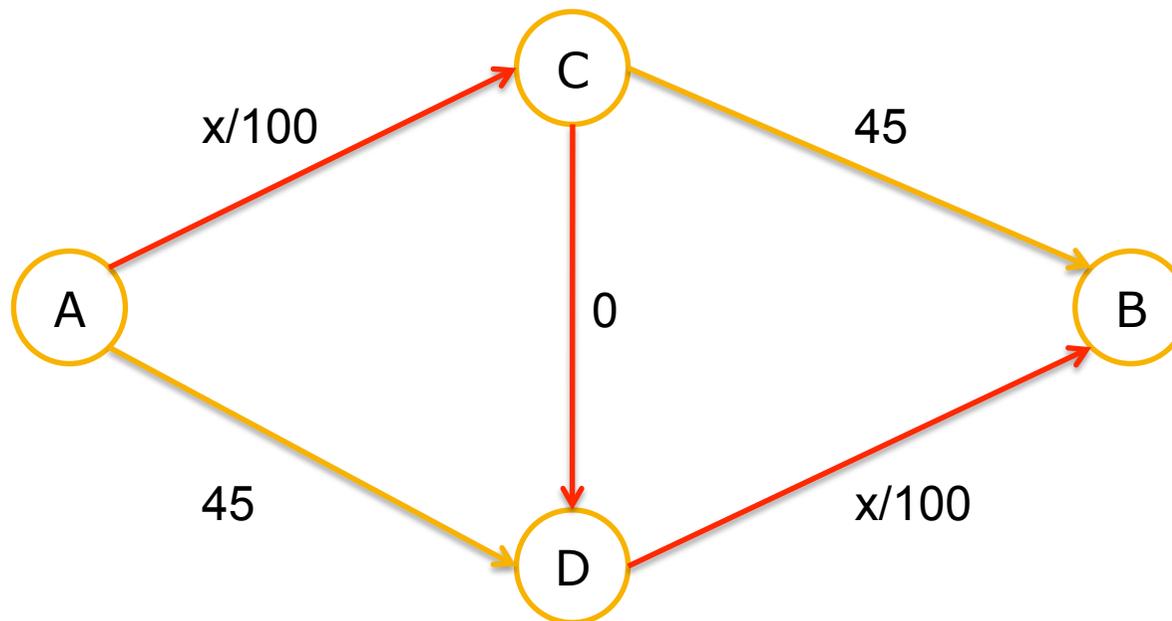
### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- **GT in Netzwerken**
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - **Braess Paradox**

# Game Theorie and Networks

## Braess's Paradox

4000 Autos wollen von A nach B



Einziges Nash Gleichgewicht:  $4000/100 \cdot 2 = 80$

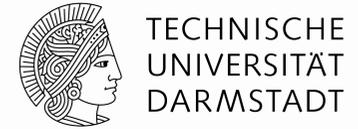
### Outline

- GT Einführung
  - Das Spiel
  - Terminologien
  - Nash
  - Mixed Strategies
- Evolutionary GT
  - EES
  - Abstrakte Spiele
  - EES vs. Nash
- **GT in Netzwerken**
  - Einführung
  - Gleichgewichte
  - **Braess Paradox**

**Vielen Dank**

---

# Quellen



---

## Inhalt

Davide Easley, Jon Kleinberg, Networks Crowds and Markets, Cambridge University Press, 2010, Kapitel 6,7 und 8

## Video

[http://wn.com/prisoner's\\_dilemma](http://wn.com/prisoner's_dilemma), accessed November 29, 2010

## Bilder

Käfer

Myers, P., R. Espinosa, C. S. Parr, T. Jones, G. S. Hammond, and T. A. Dewey. 2006. The Animal Diversity Web (online). Accessed November 26, 2010 at <http://animaldiversity.org>.

Baum

Christmas Tree by Phillip J Rhoades, <http://www.ungab.com/coloring>