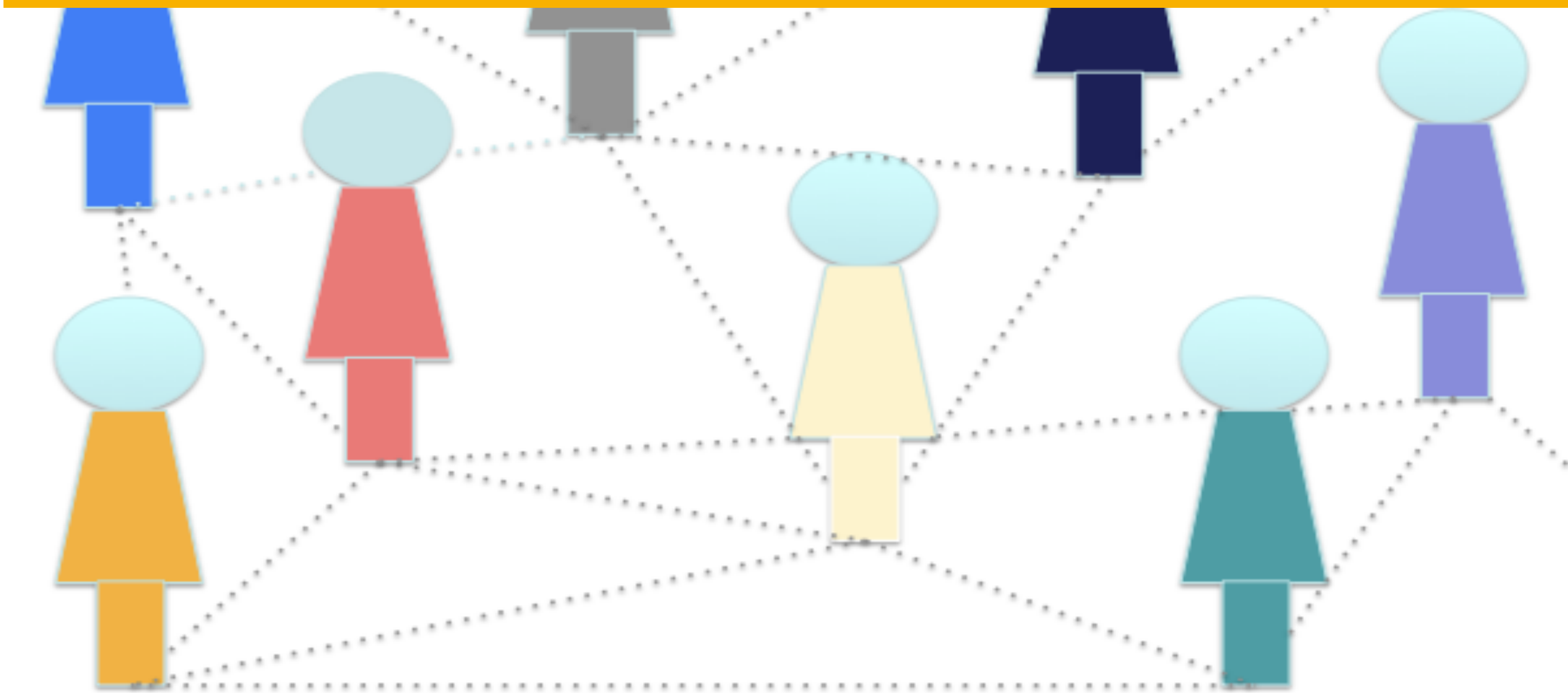
Matching markets

Seminar maschinelles Lernen WS 10/11



Einführung

- Matching markets ist das erste Kapitel des Themenkomplexes „Märkte und strategische Interaktionen in Netzwerken“
- Wörtlich übersetzt bedeutet es soviel wie „gepaarte oder auch passende Märkte“

- **Definition:** Markt

„Ein Markt ist das Zusammentreffen von Angebot und Nachfrage, aufgrund dessen sich Preise bilden.“[7]

- Märkte können als netzartig strukturierte Interaktionen abgebildet werden.
- Das Kapitel Matching markets hat als Darstellungsform den bipartiten Graphen mit der Eigenschaft des perfekten Matchings.

Bipartite Graphen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

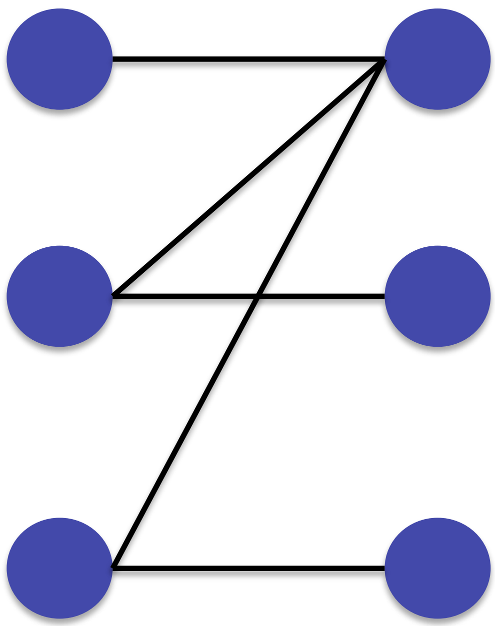
Definition:

- ist ein Graph, der auf der „rechten und linken Seite" die gleiche Anzahl von Knoten haben (also disjunkte Teilmengen)
- die Knoten der rechten Seite sind nur über Kanten mit Knoten der linken Seite verbunden und umgekehrt
- vollständig bipartit bedeutet, dass jeder Knoten der rechten Seite mit allen Knoten der linken Seite verbunden ist und umgekehrt
- ein regulärer bipartiter Graph enthält ein perfektes Matching

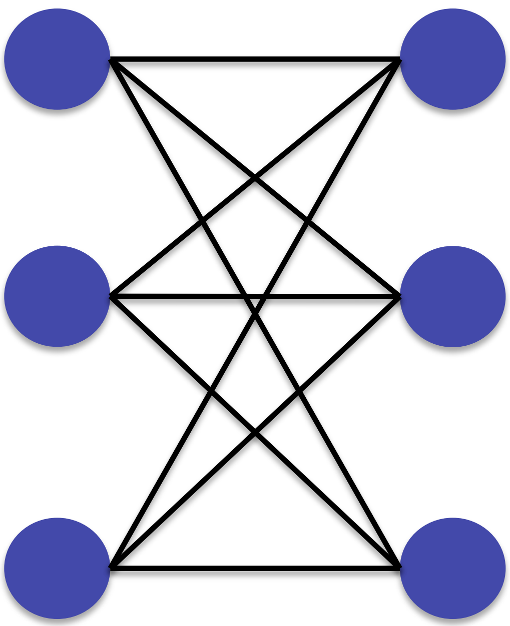
Beispiel: bipartite Graphen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

linke Seite rechte Seite



bipartiter Graph



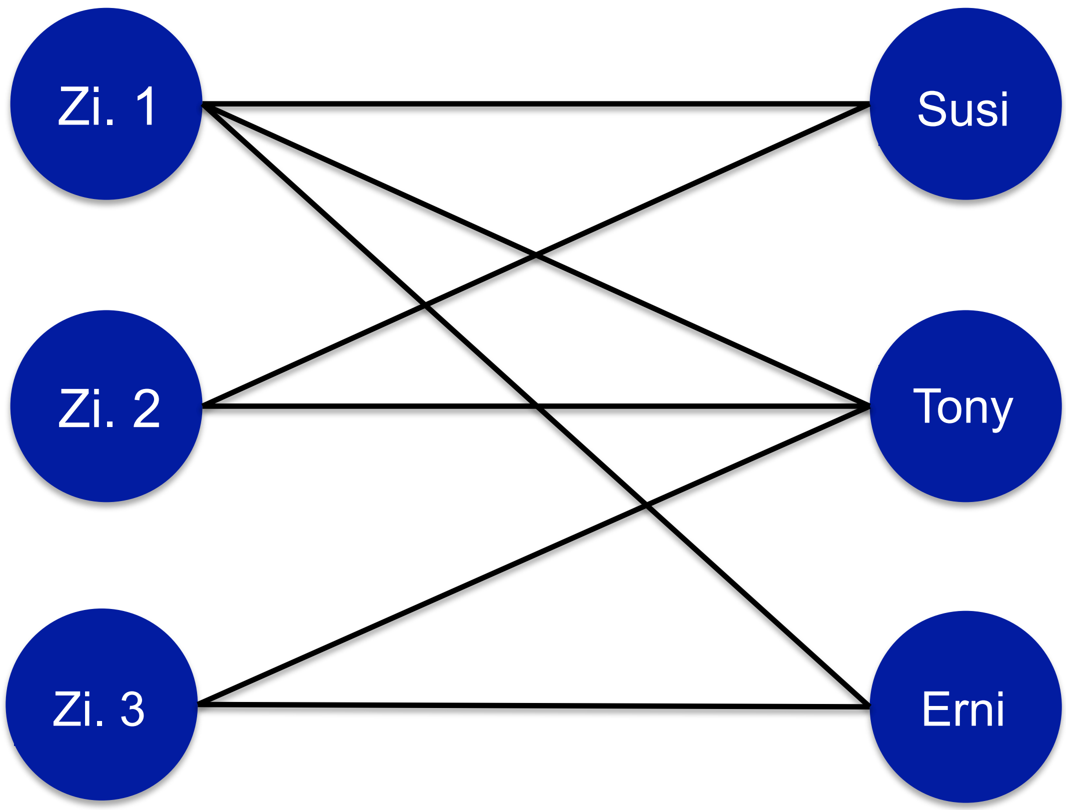
vollständig bipartiter Graph

Matching / Perfektes Matching

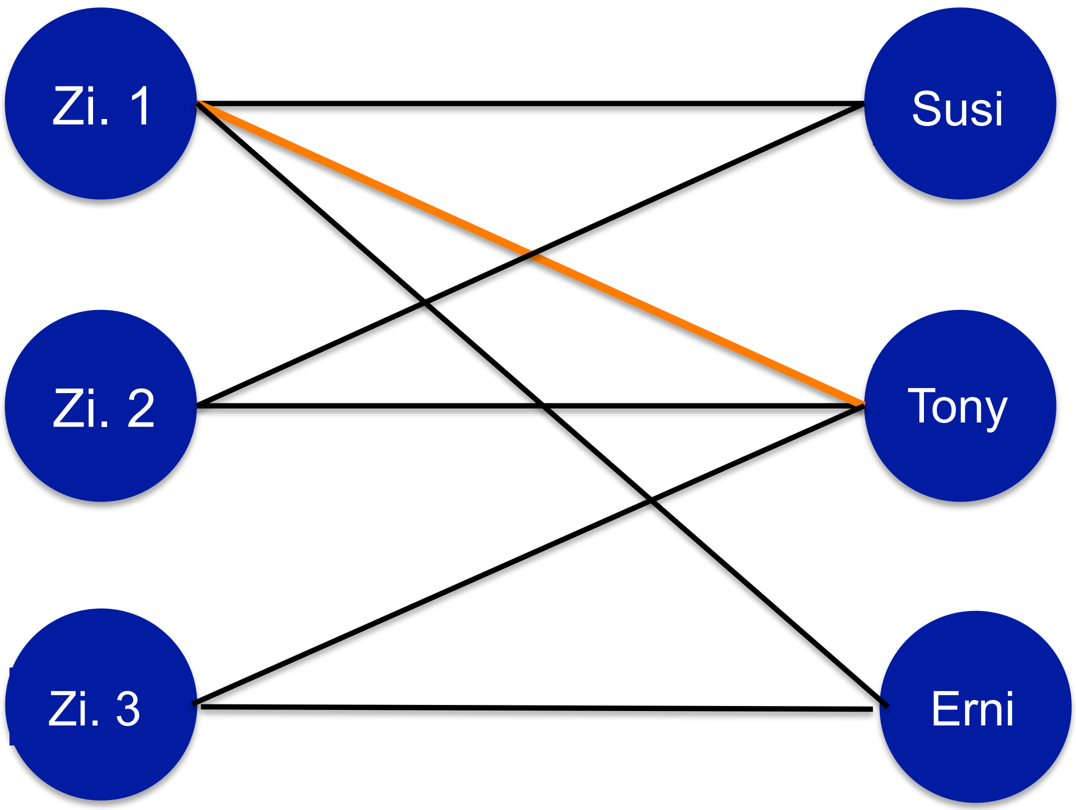
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ein ***Matching*** ist eine sogenannte Paarung eines Knoten der rechten Seite mit einem Knoten der linken Seite
- diese Paarung wird angezeigt durch eine Kante zwischen diesen beiden Knoten
- ein ***perfektes Matching*** in einem bipartiten Graphen wird erreicht wenn:
  - bezogen auf das Beispiel jedem Studenten genau ein Zimmer zugewiesen werden kann
  - Bedingung: Zuordnung erfolgt nur wenn bereits eine Kante von einem Studenten zu dem Zimmer existiert
  - dadurch gibt sich in einem bipartiten Graphen meist nicht nur ein perfektes Matching

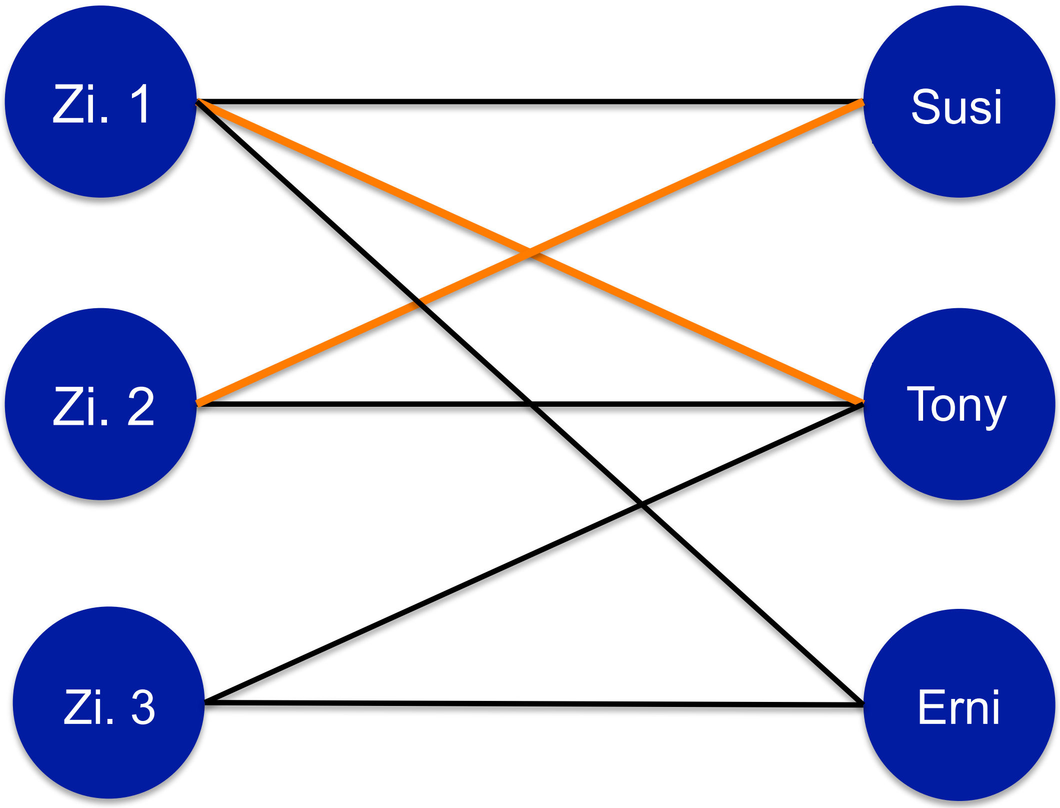
Beispiel: perfektes Matching



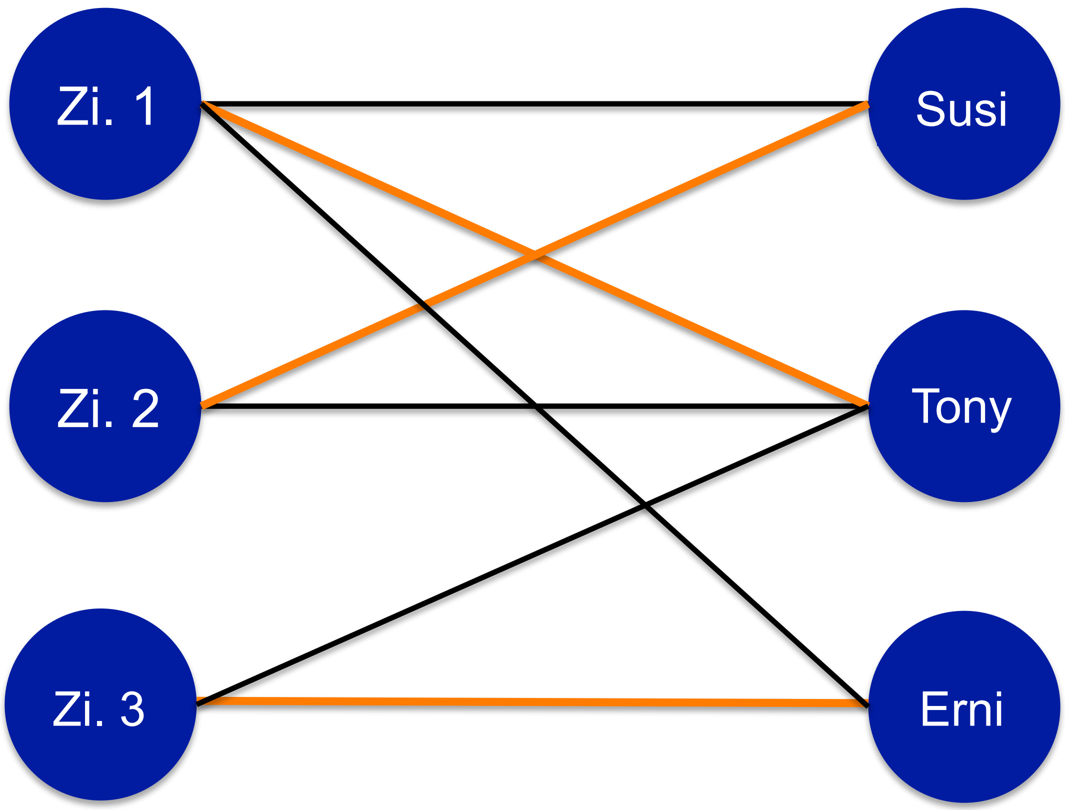
Beispiel 1: perfektes Matching



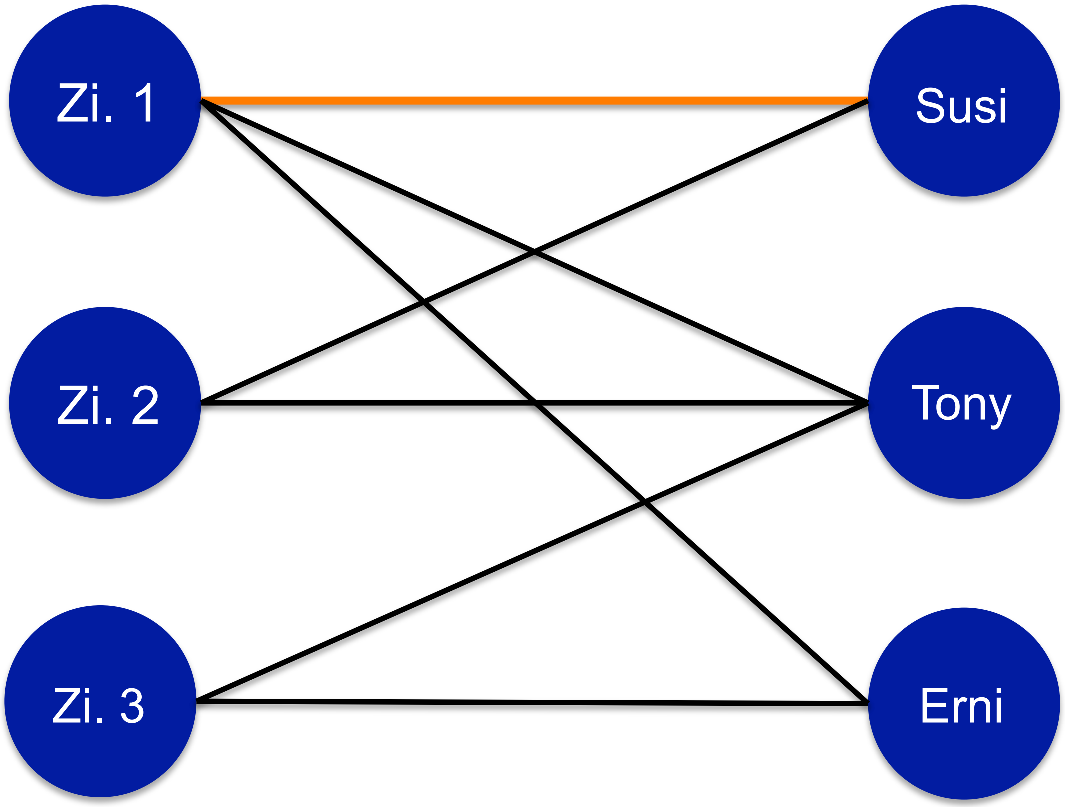
Beispiel 1: perfektes Matching



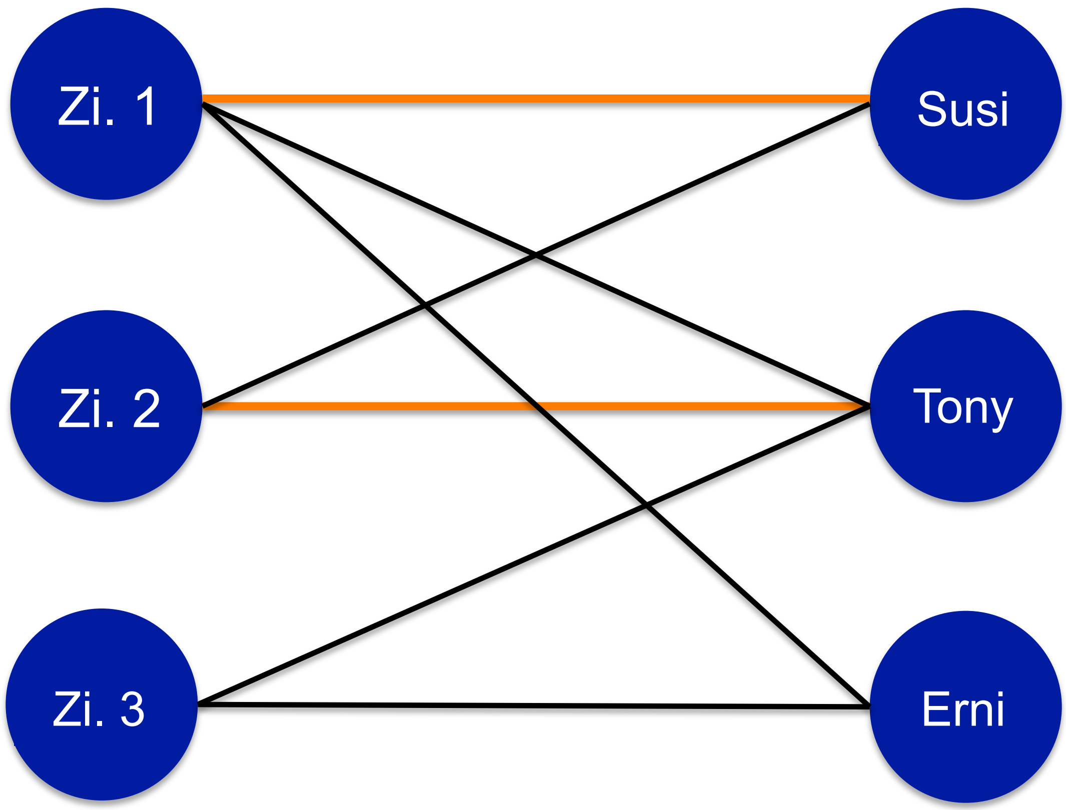
Beispiel 1: perfektes Matching



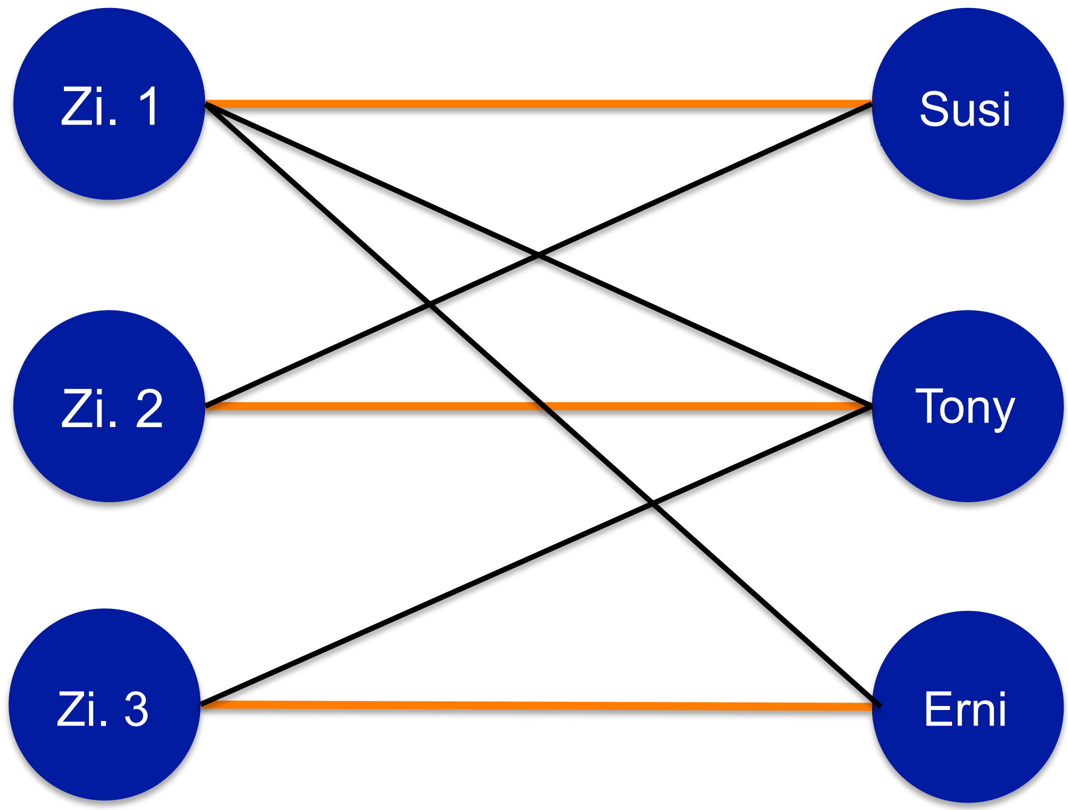
Beispiel 2: perfektes Matching



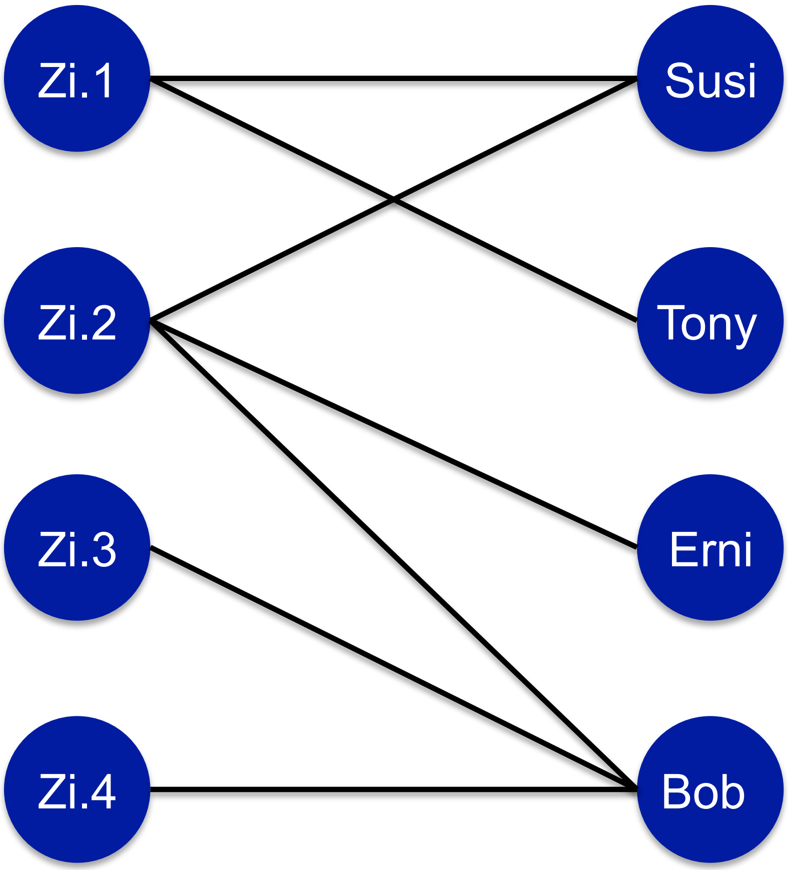
Beispiel 2: perfektes Matching



Beispiel 2: perfektes Matching

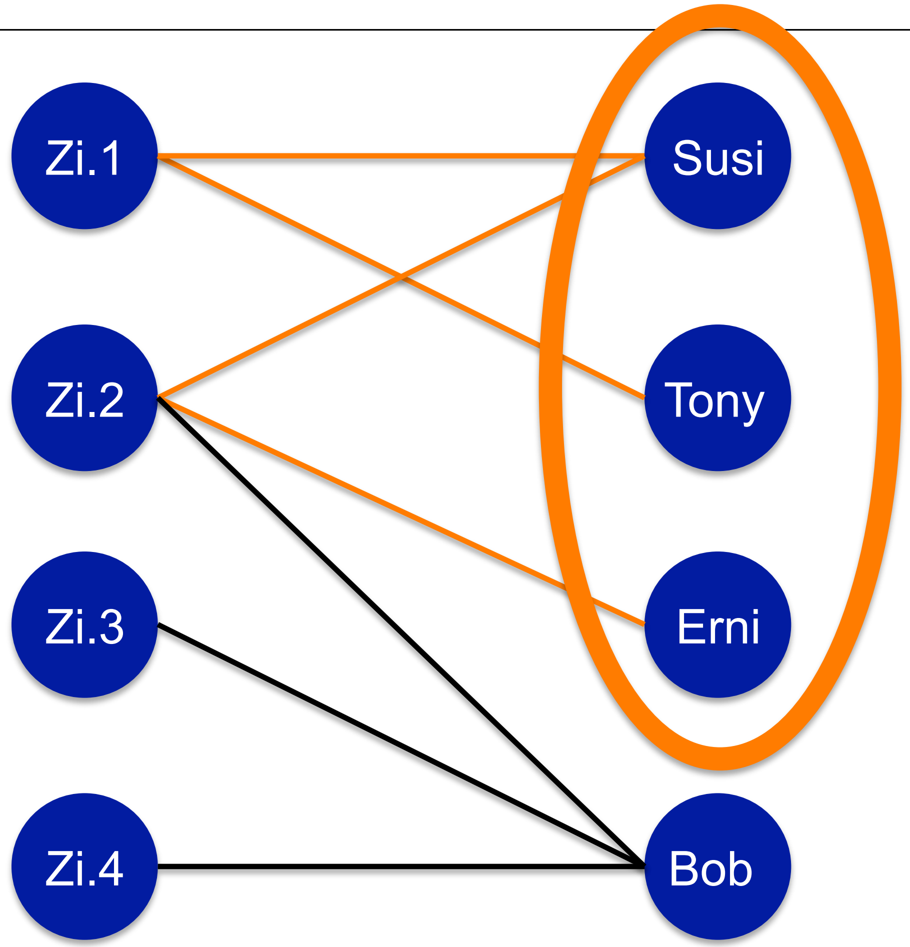


Verengende Sets 1/2



Verengende Sets 2/2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



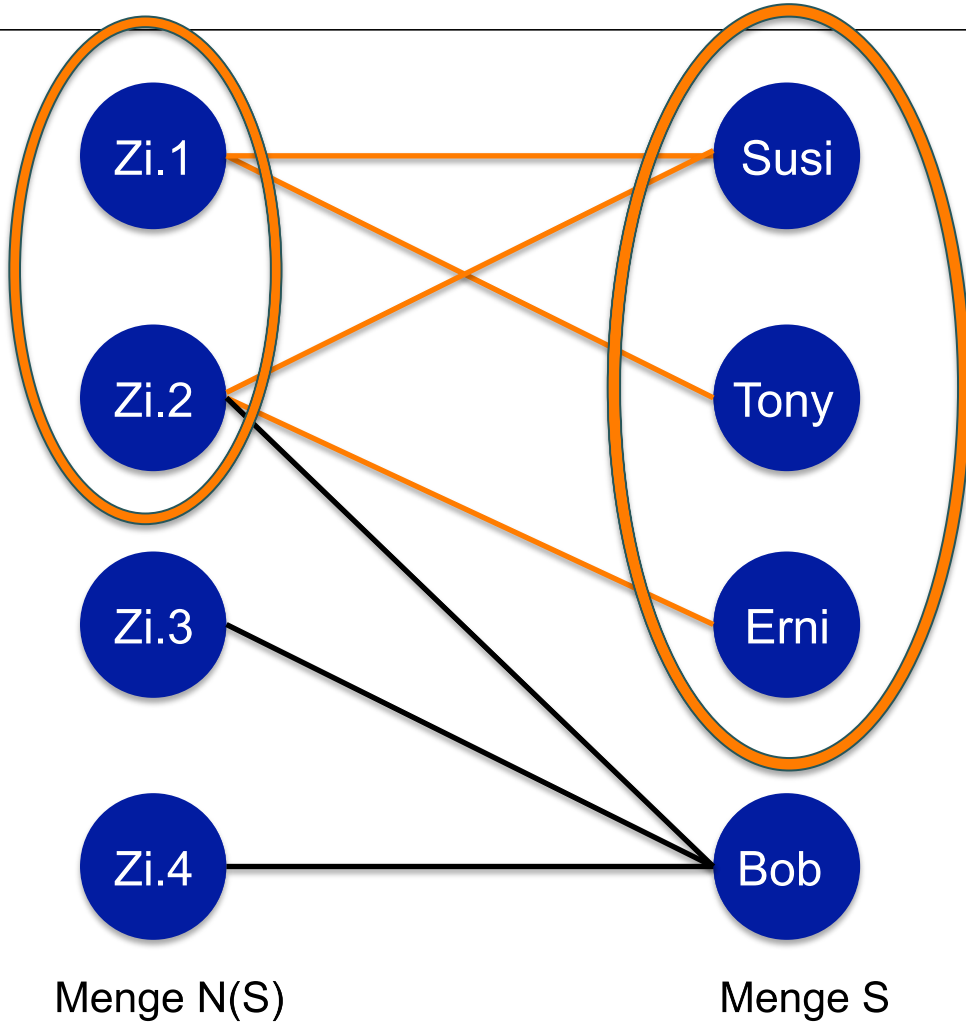
Die drei Studenten haben zusammen eine Zuordnung auf lediglich zwei Zimmer, so dass es kein perfektes Matching geben kann.

Verengende Sets 3/4

Formal:

- Die Knoten der rechten Seite in einem bipartiten Graphen bilden die Menge S.
- Die Knoten der linken Seite, die mit einem Knoten aus S verbunden sind, bilden zusammen die Nachbarn der Menge S, kurz die Menge N(S).
- Eine Menge im Graphen ist dann verengend, wenn die Menge S echt größer als N(S) ist.
- Die Menge S enthält demnach strikt mehr Knoten als die Menge N(S).

Verengende Sets 4/4



Die Knotenanzahl von N(S) ist strikt kleiner als die Knotenanzahl von S.

Matching Theorem

Definition:

Wenn ein bipartiter Graph (mit gleicher Anzahl von Knoten auf der rechten und linken Seite) kein perfektes Matching aufweist, dann muss es eine verengende Menge in diesem Graphen geben.

- Es wurde unabhängig von zwei Mathematikern Dénes König [1931] und Phillip Hall [1935] entdeckt.
- König zeigt den Zusammenhang zwischen der größten Paarung und der minimalen Knotenüberdeckung auf (Satz von König).
- Hall zeigt dies über den Heiratsproblem (auch Heiratssatz genannt).

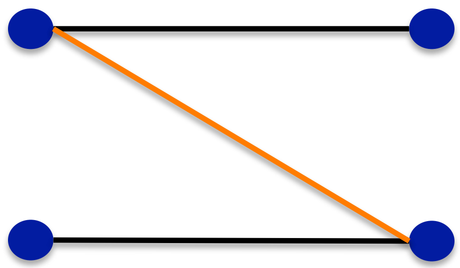
maximales Matching

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

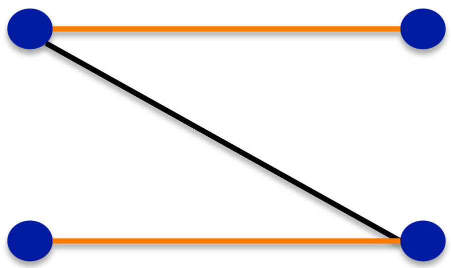
- **Definition:** maximales Matching

Ein Graph enthält ein Matching, welches nicht maximal ist. Um ein maximales Matching zu erhalten, wird das vorhandene Matching sukzessiv um neue Paarungen zwischen zwei Knoten vergrößert. Die bereits aufgenommen Knoten dürfen sich nicht wiederholen.

- Beispiel:



Nicht maximales Matching



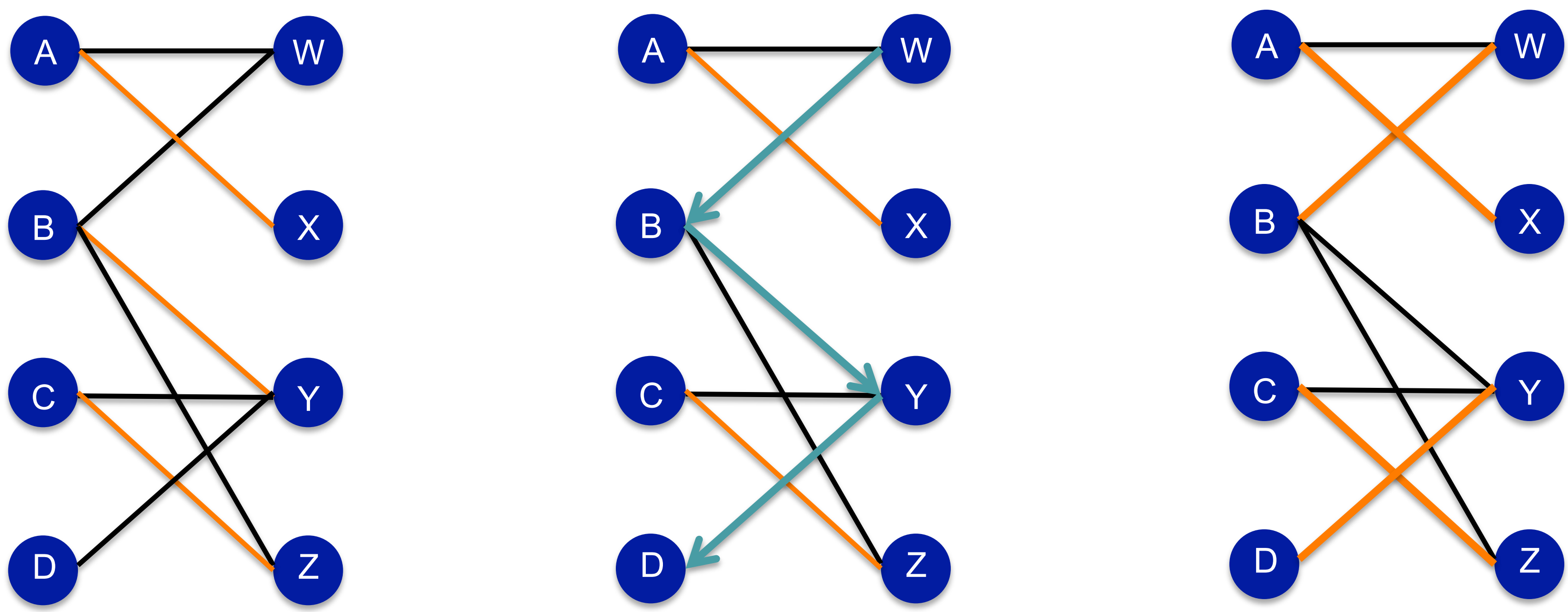
Maximales Matching

Ausgewählte Verfahren zur Suche von Matchings 1/2

„einfaches" Verfahren:

1. Start bei einem noch nicht enthaltenen Knoten und einer von ihm ausgehenden Nicht-Matching-Kante.
2. Der zunehmende Weg gestaltet sich dann durch den Wechsel zwischen Nicht-Matching-Kanten und Matching-Kanten.
3. Bereits gefundene Knoten haben nur eine Paarung. Sie kommen nicht in zwei Paarungen gleichzeitig vor.
4. Wenn in einem zunehmenden Weg sowohl Anfangs- als auch Endknoten im ursprünglichen Matching nicht gepaart sind, dann werden alle bisherigen Matching-Kanten zu Nicht-Matching Kanten und umgekehrt. Das Matching ist vergrößert.

Beispiel: „einfaches“ Verfahren



Graph mit einem Matching | zunehmender Weg | Graph mit größerem Matching

Ausgewählte Verfahren zur Suche von Matchings 2/2

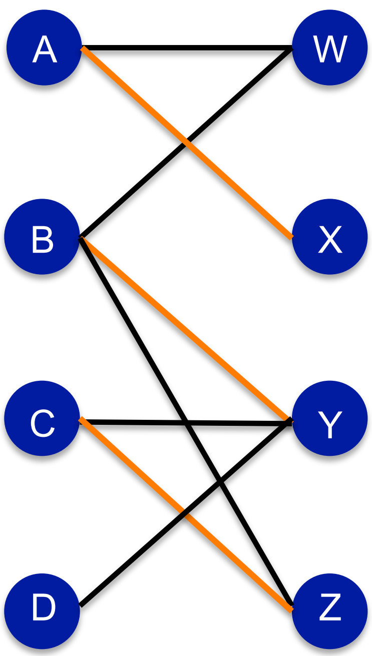
Verfahren: BFS (Breitensuche modifiziert)

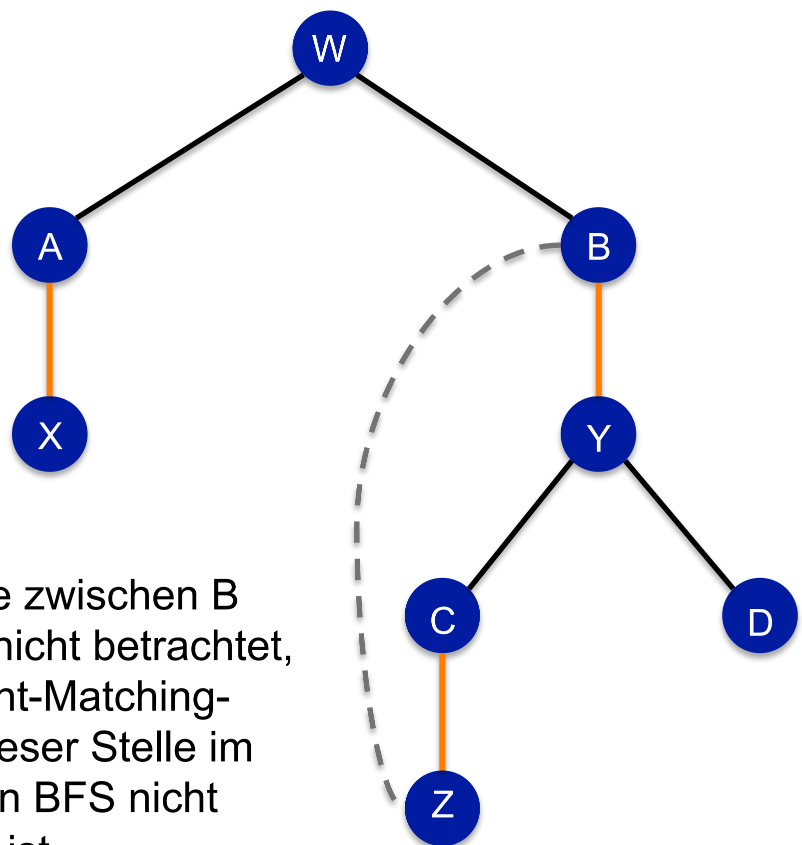
1. Start bei einem Knoten, der noch nicht im Matching vorhanden ist. Dieser wird im resultierenden Baum der Wurzelknoten.
2. Schicht für Schicht wird entlang der vorhandenen Kanten nach noch nicht entdeckten Knoten gesucht.
3. Der modifiziert BFS hat die Bedingung, dass Nicht-Matching-Kanten und Matching-Kanten sich in der Suche abwechseln.
4. Durch die Anwendung des Verfahrens ergibt sich, dass je Schicht entweder nur Knoten der linken Seite vorhanden sind oder der rechten.

Hinweis: In dem so entstehenden Baum sind alle ausgehenden Kanten des Wurzelknotens Nicht-Matching Kanten. Die Verbindung der Knoten von Schicht 1 mit Knoten der Schicht 2 besteht ausschließlich aus Matching-Kanten. Die Verbindung zur nächsten Schicht besteht wieder aus Nicht-Matching-Kanten.

Beispiel: modifizierte BFS

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT





Diese Kante zwischen B und Z wird nicht betrachtet, da eine Nicht-Matching-Kante an dieser Stelle im modifizierten BFS nicht zugelassen ist.

Andere Verfahren zur Suche maximaler Matchings

- *Algorithmus von Hopcroft und Karp:*
  - Zu Beginn enthält die Paarung keine Kanten.
  - Es werden „alternierende“ Pfade zwischen noch ungepaarten Knoten konstruiert.

- *Ungarische Methode:*
  - Die Kanten werden mit Hilfe von Bewertungen gewichtet.
  - Lösung durch lineare Optimierung (Minimieren oder Maximieren)

Beispiel: Spaltenminimum

	Susi	Erni	Tom	Bob	min
Cello	1	2	1	3	1
Geige	2	3	4	1	1
Gitarre	4	4	2	4	2
Klavier	2	1	3	2	1
min	1	1	1	1	

Es wird zuerst von jedem Eintrag das Spaltenminimum abgezogen, und das Zeilenminimum aktualisiert.

	Susi	Erni	Tom	Bob	min
Cello	0	1	0	2	0
Geige	1	2	3	0	0
Gitarre	3	3	1	3	1
Klavier	1	0	2	1	0
min	0	0	0	0	

Im nächsten Schritt wird von jedem Eintrag das Zeilenminimum abgezogen.

Beispiel: Spaltenminimum

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

	Susi	Erni	Tom	Klavier	min
Cello	0	1	0	2	0
Geige	1	2	3	0	0
Gitarre	2	2	0	2	0
Bob	1	0	2	1	0
min	0	0	0	0	

Optimale Zuordnung

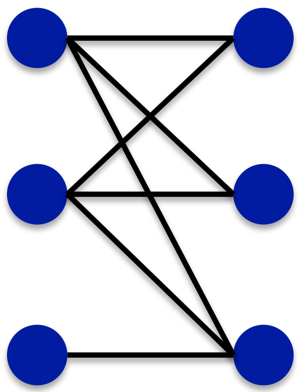
Kind	Instr	Präf.
Susi	Cello	1
Erni	Klavier	1
Tom	Gitarre	2
Bob	Geige	1

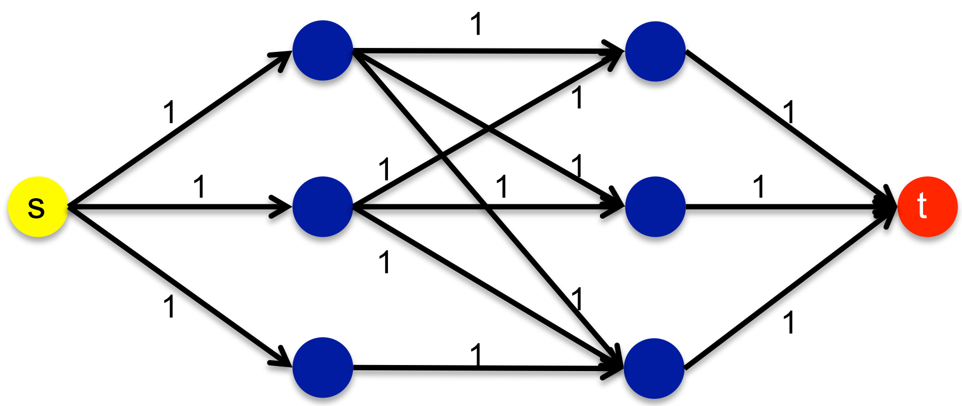
Andere Verfahren zur Suche maximaler Matchings

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Algorithmus von Dinic:

- Sucht nach einem maximalen Fluss in einem Netzwerk dieser entspricht dem maximalen Matching des bipartiten Graphen
- Zuerst wird der bipartite Graph in ein Netzwerk/ Flussproblem umgewandelt
- Gewichtung aller vorhandenen Kanten mit 1
- Berechnung des maximalen Fluss in einem Netzwerk





Effizienz der Matching-Suche

- Frage:

  Wie effizient ist die Suche nach einem maximalen / perfekten Matching?

– Diese kann allgemein nicht beantwortet werden. Vielmehr ist es davon abhängig welches Verfahren angewendet wird.

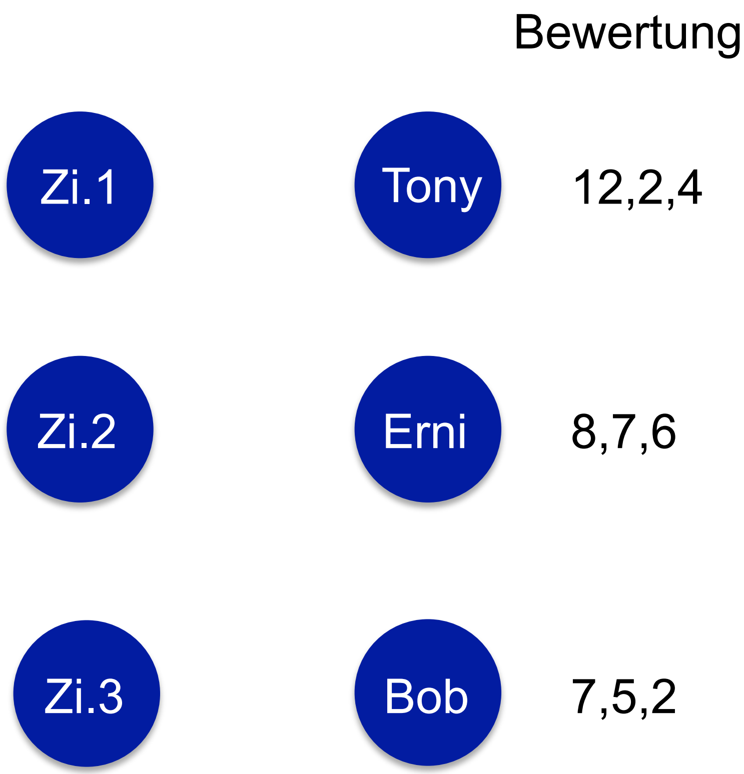
- So ist die Laufzeit von bspw.:
  - (modifizierte) BFS $O(|V| + |E|)$
  - Algorithmus von Hopcroft und Karp $O(E\sqrt{V})$
  - Ungarische Methode $O(|V|^3)$
  - Algorithmus von Dinic $O(|V|^2 * |E|)$[4]

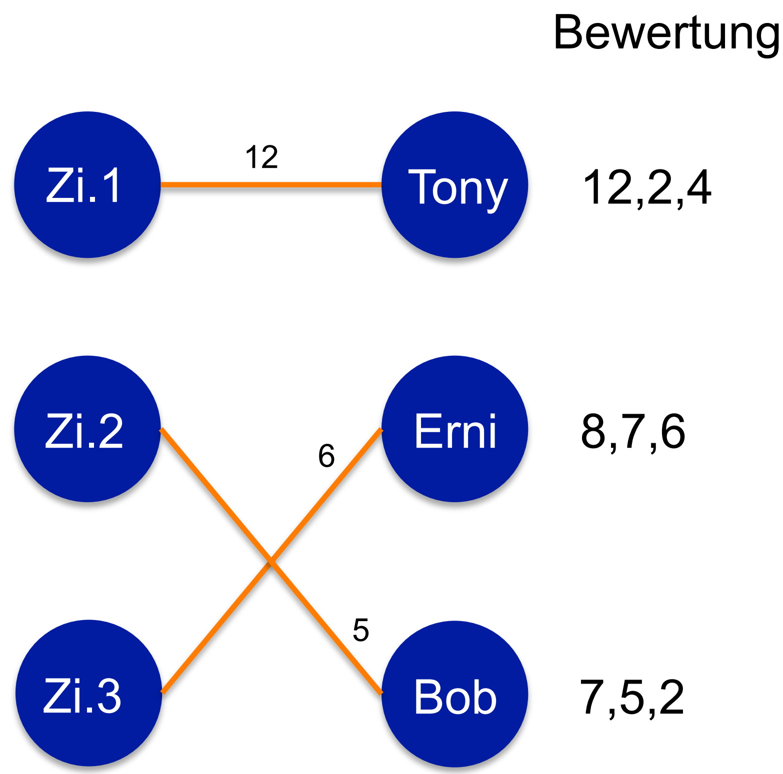
Bewertungen und optimale Zuordnung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher jetzt lediglich Betrachtung von binären Entscheidungen. (Student nimmt das Zimmer: ja/nein)
- Erweiterung auf individuelle Nutzeneinschätzungen, sogenannte *Präferenzen*, der Individuen.
- Wenn der Präferenzwert des Individuums hoch ist, dann ist auch der Nutzen für das Individuum hoch und umgekehrt. (Dadurch wird eine numerische Bewertung möglich)
- Anhand dieser Bewertungen lässt sich die Qualität einer Zuordnung von einem Objekt zu einem Individuum feststellen.
- Hat die Qualität der Zuordnung einen maximal möglichen Wert erreicht, so spricht man von der *optimalen Zuordnung*.

Beispiel: Qualität der Zuordnung





<u>Hinweis</u>: die Skala der Bewertung geht von 0 bis 12, wobei 12 das höchste ist.

Qualität der Zuordnung: 12 + 6 + 5 = 23

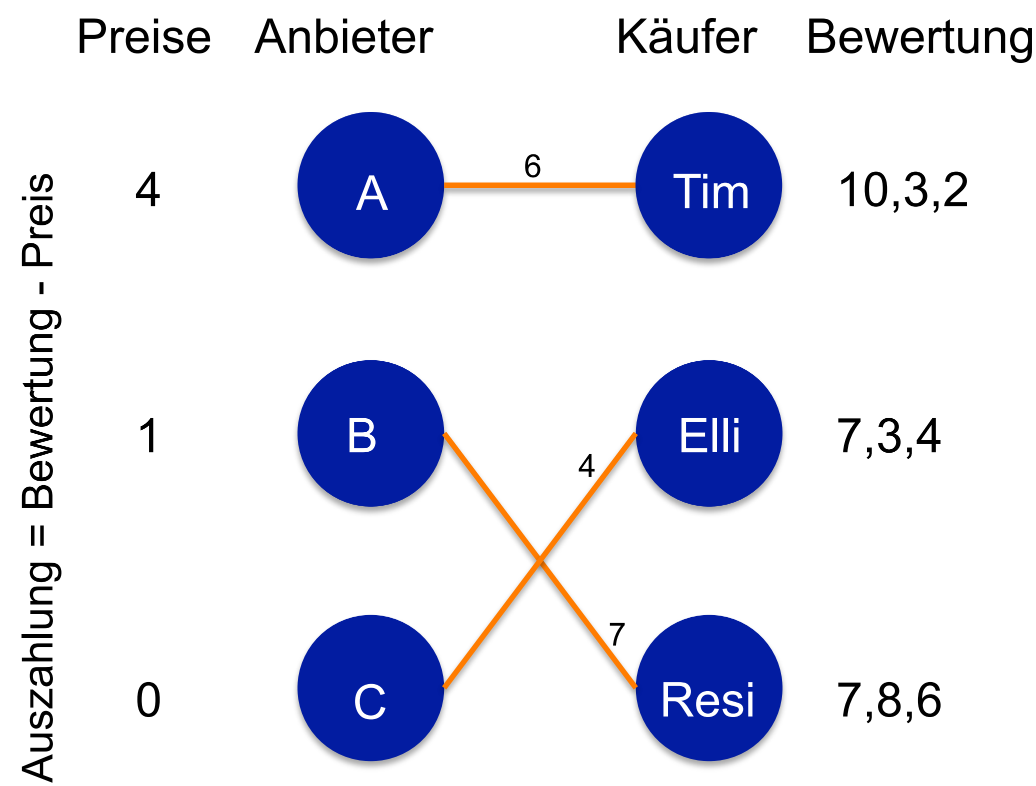
Anbieter, Nachfrager und Auszahlung

- Als nächstes werden in das Modell Anbieter einer Ware (Verkäufer), Nachfrager dieser Ware (Käufer) und ein Markt für diese Ware eingeführt.
- Die *Nachfrager* haben für jede Ware des Anbieters ihre individuellen Präferenzen.
- Der *Anbieter* bietet seine Ware zu einem Preis größer gleich 0 zum Verkauf an.
- Der Nachfrager, der die Ware zu diesem Preis kauft, erhält eine sogenannte *Auszahlung* in Höhe seiner Präferenz minus den zu zahlenden Preis.
- Erhält der Nachfrager eine maximale Auszahlung bei einem Anbieter, so wird dieser der *bevorzugte Anbieter*.

Beispiel: bevorzugte Anbieter

Anbieter	Käufer	Bewertung
A	Tim	10,3,2
B	Elli	7,3,4
C	Resi	7,8,6

Bewertung der Käufer



Graph der bevorzugten Anbieter/Verkäufer

Preise und markträumende Preise

- **Definition:**

  Preis

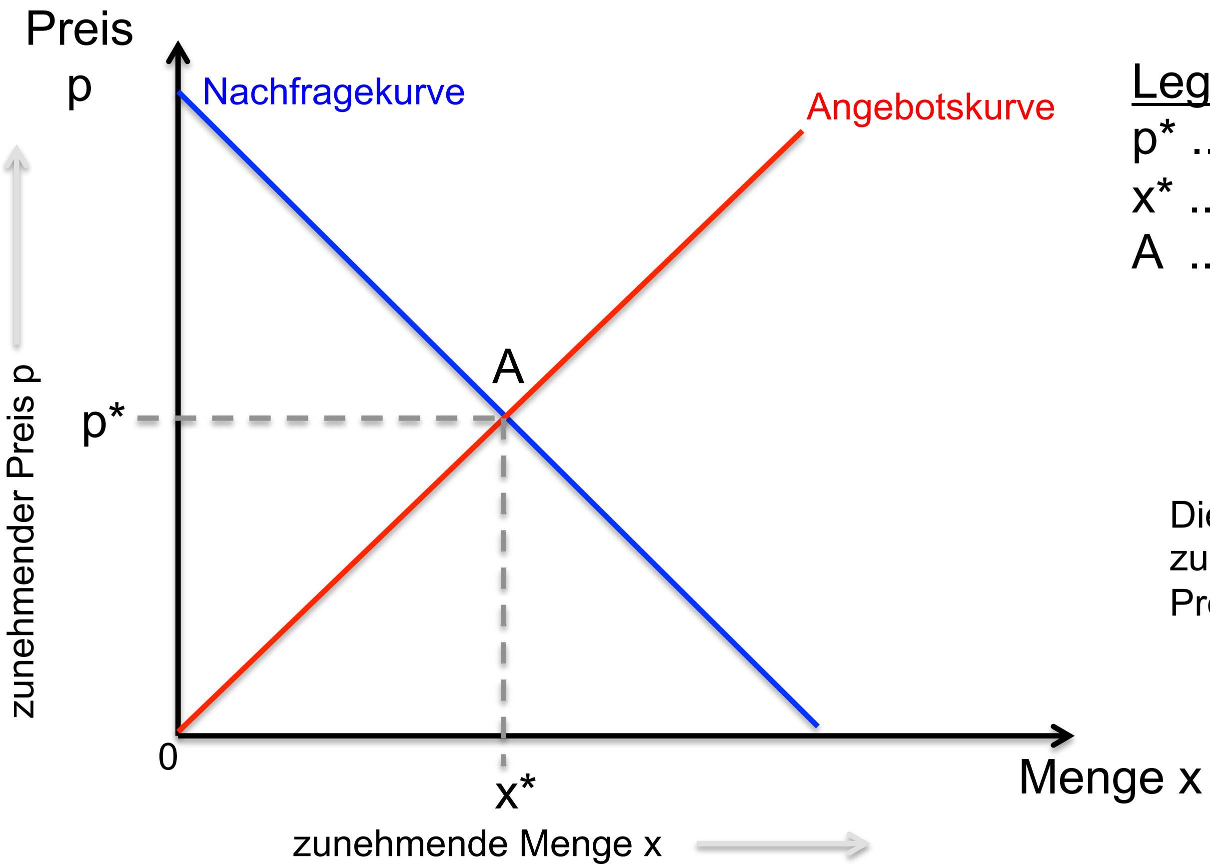
  „Der Preis bezeichnet den in Geldeinheiten ausgedrückten Tauschwert eines Gutes." [2]

  markträumende(r) Preis(e):

  „Ein markträumender Preis wird auch als Gleichgewichtspreis bezeichnet. Befindet sich ein Markt im Gleichgewicht, d.h. sind Angebot und Nachfrage gleich, dann wird die Menge der Waren in diesem Markt zum Gleichgewichtspreis verkauft." [3]

- Es kann außerdem festgehalten werden, dass es für jede Menge von Käufer-Bewertungen eine Menge von markträumenden Preisen gibt.

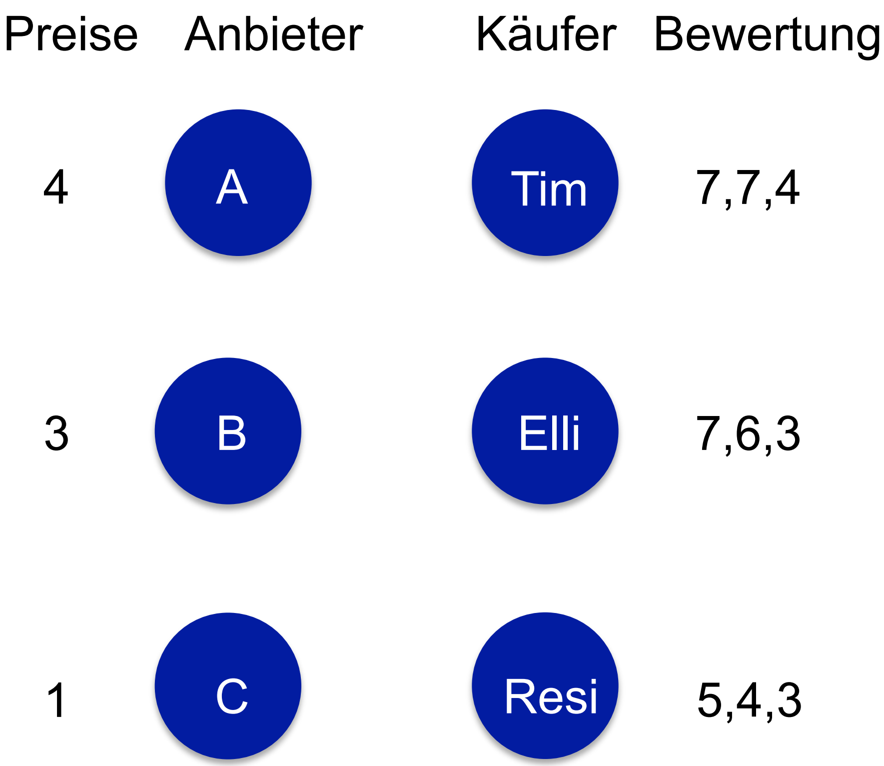
Grafik markträumender Preis



<u>Legende</u>:
p* ... Gleichgewichtspreis
x* ... Gleichgewichtsmenge
A ... Marktgleichgewicht

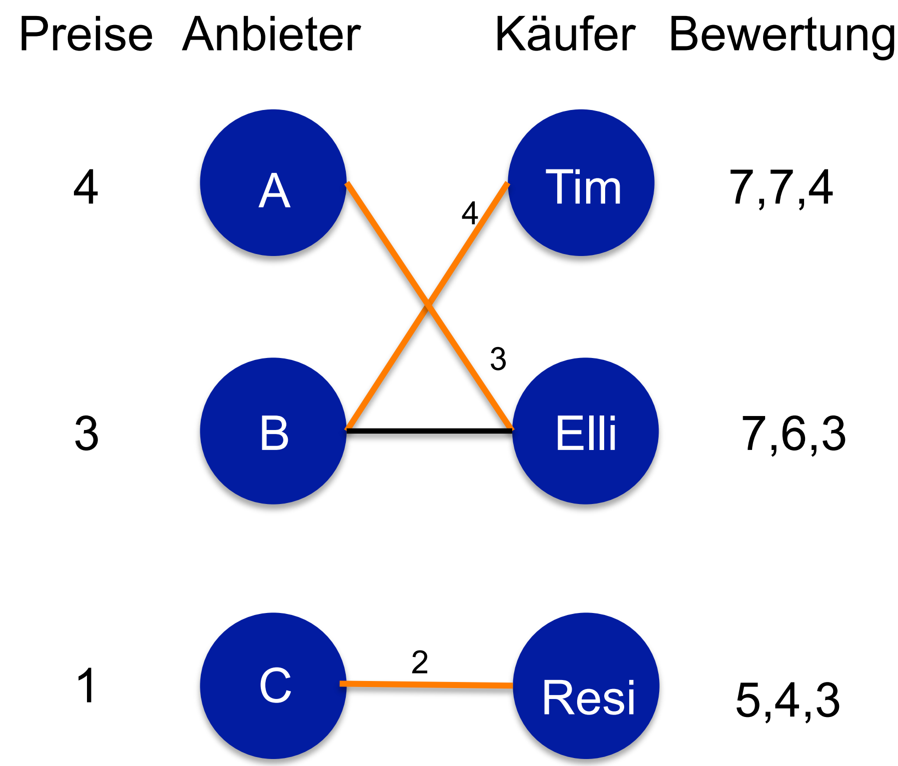
Die Angebotskurve steigt mit zunehmender Menge x, während der Preis bei zunehmender Menge sinkt.

Beispiel: markträumende Preise



Ausgangslage

Auszahlung = Bewertung - Preis



Graph mit markträumenden Preisen

Eigenschaften markträumender Preise

- Es kann immer ein Preis gefunden werden, so dass der Markt geräumt wird.
- Optimalität:

  In einem Graphen bevorzugter Verkäufer hat das perfekte Matching markträumende Preise, wodurch insgesamt die maximale Auszahlung an alle Käufer erreicht wird .
- Die Bewertung des perfekten Matchings ist die Summe der gezahlten markträumenden Preise der Käufer.
- Die Gesamtauszahlung an alle Käufer errechnet sich wie folgt:

Gesamtauszahlung = Gesamtbewertungen des perfekten Matchings –
die Summe aller Preise

Konstruktion markträumender Preise

- Die Konstruktion markträumender Preise geschieht über eine Art Auktion.
- Das Verfahren „Multi-Item Auktion" wurde von den Ökonomen Gabrielle Demange, David Gale und Marilda Sotomayor 1986 entdeckt.

- **Definition:** Auktion

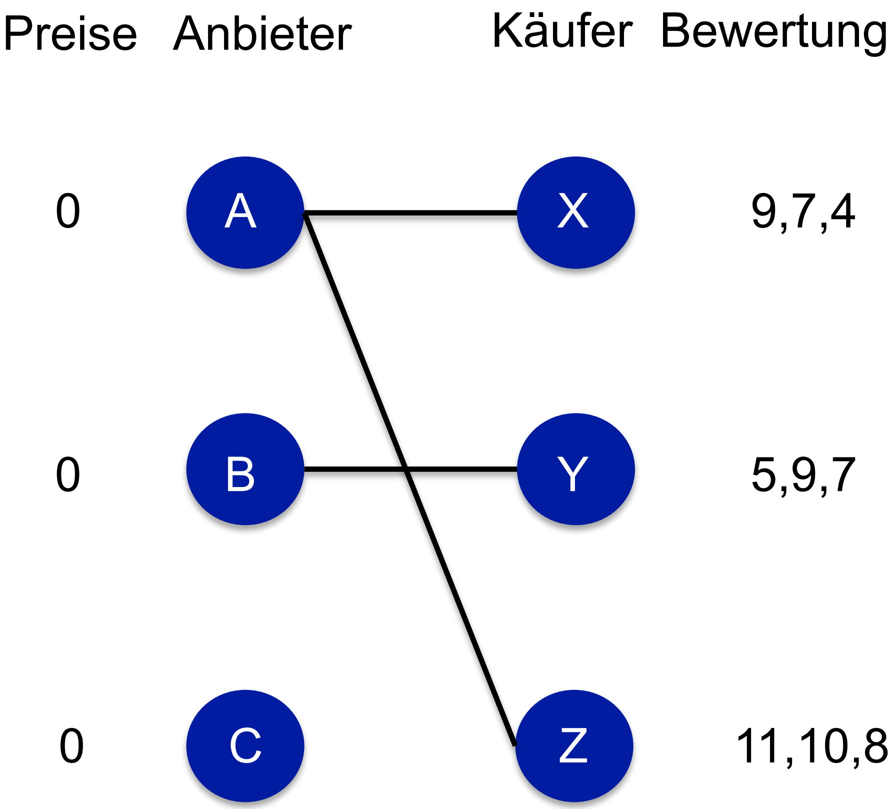
  „Eine Auktion (Versteigerung) ist eine besondere Art der Preisermittlung bei einem Verkauf, bei der potentielle Käufer oder Verkäufer Gebote abgeben."[6]

Das Auktions-Verfahren

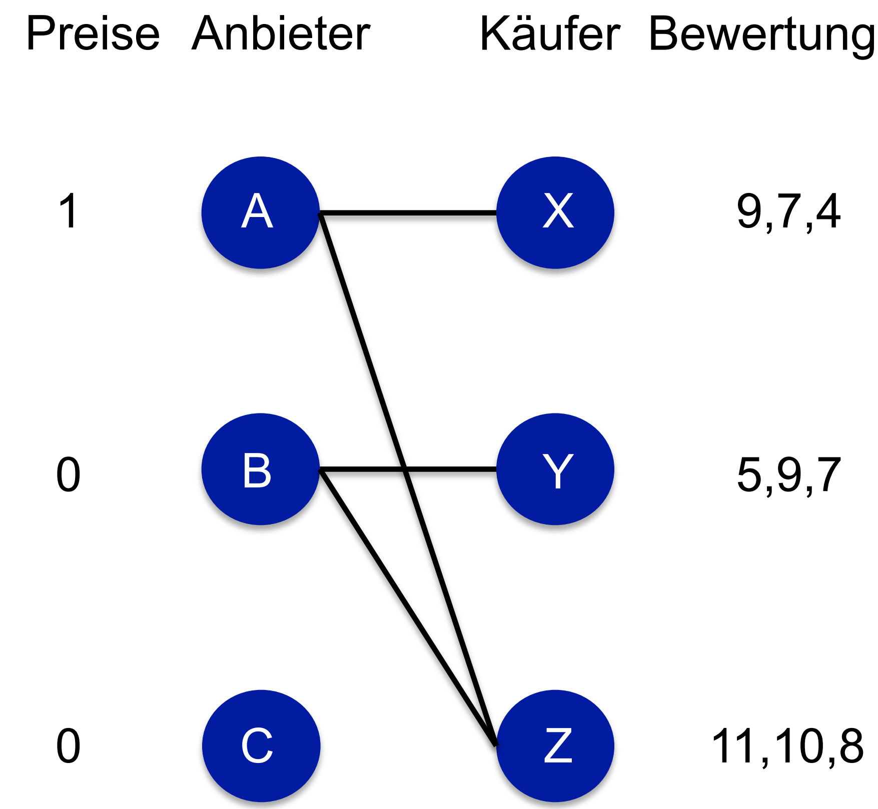
1. Zu Beginn der Auktion setzen alle Verkäufer ihre Preise auf 0.
2. Die Käufer wählen ihren bevorzugten Verkäufer (höchste Auszahlung).
3. Hat der resultierende Graph ein perfektes Matching, so ist nichts weiter zu tun. Ansonsten existiert im resultierenden Graphen eine verengende Menge S von Käufern.
4. Die Anbieter aus der Menge von Nachbarn N(S) erhöhen ihre Preise um eine Einheit. Die Auktion geht weiter.
5. Die Auktion endet, wenn die Menge der markträumenden Preise konstruiert ist (perfektes Matching).

Hinweis: Während der Auktion werden oft skalierte Preise verwendet. Das bedeutet, dass der kleinste Preis 0 ist. Dies wird erreicht, indem von allen Preisen der kleinste Preis >0 subtrahiert wird.

Beispiel: Auktionsverfahren 1/3

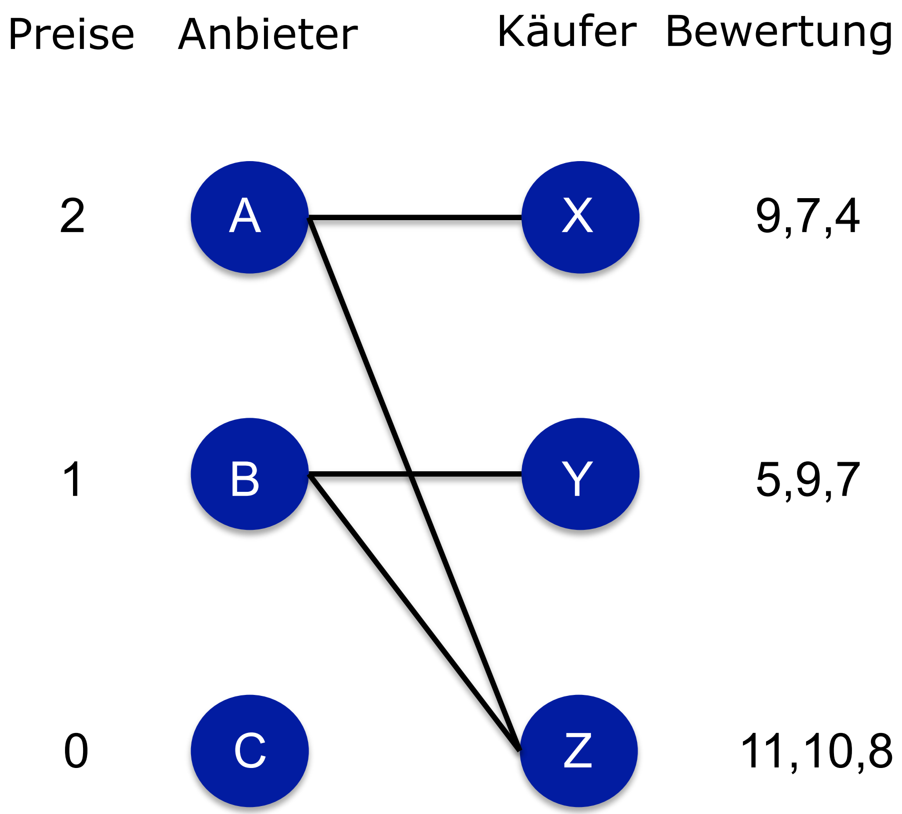


Beginn der Auktion

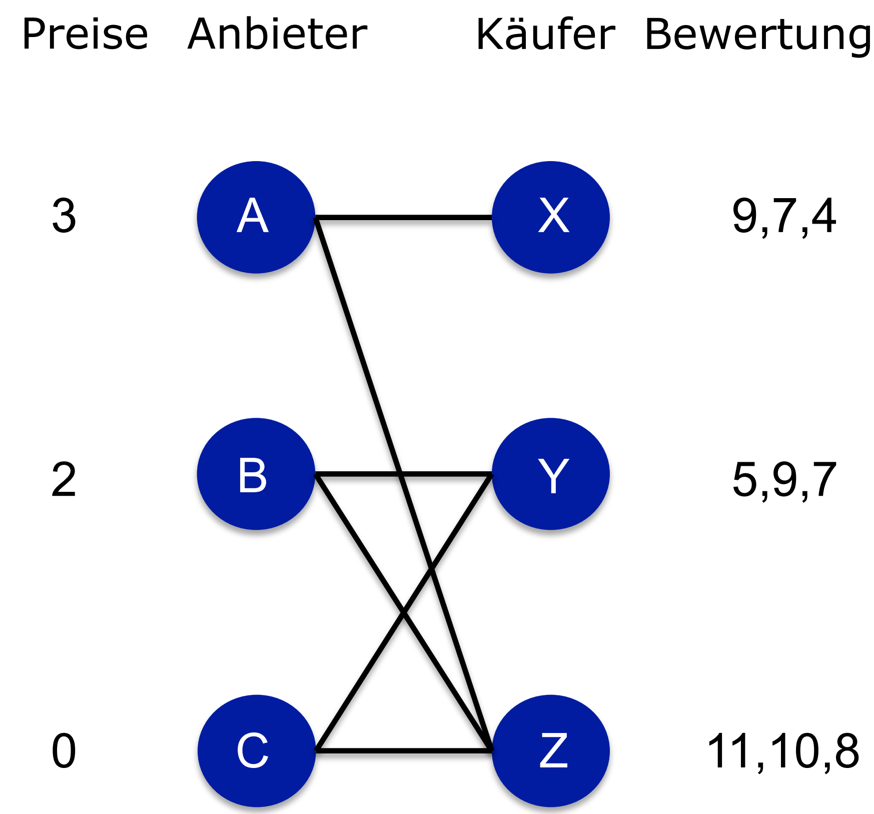


1. Auktion

Beispiel: Auktionsverfahren 2/3

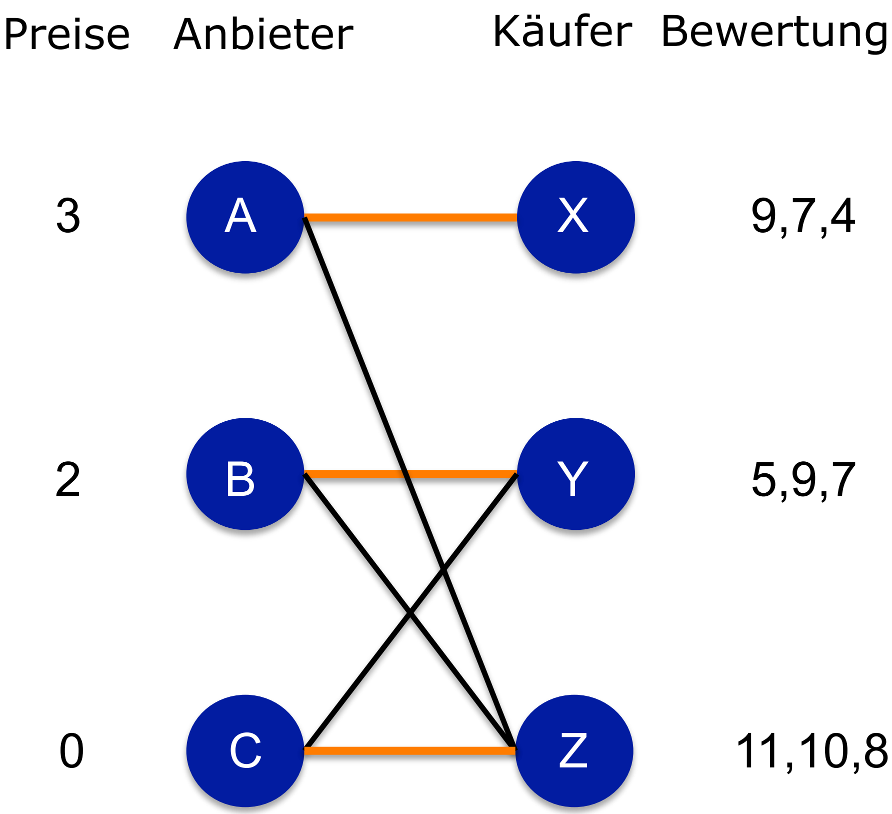


2. Auktion



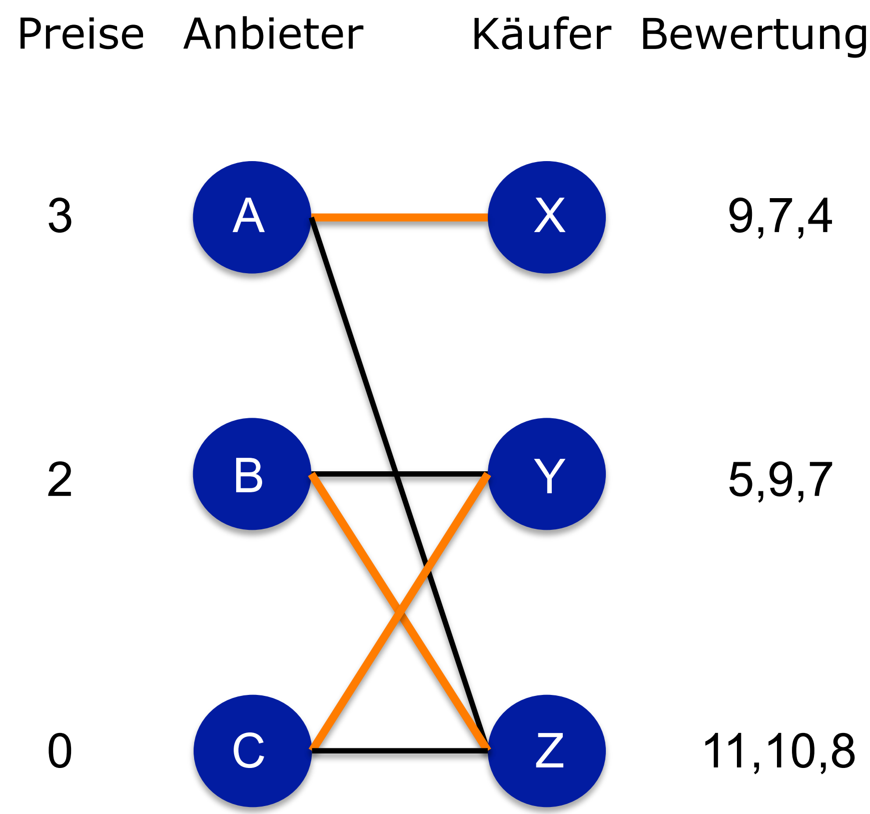
3. Auktion

Beispiel: Auktionsverfahren 3/3



Ein perfektes Matching

ODER



Ein anderes perfektes Matching

Weitere Anwendungsgebiete

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- In der Industrie:
  - Verteilung von Aufträgen auf Maschinen
  - Verteilung knapper Ressourcen auf Maschinen / Produkte
- Andere:
  - Partnervermittlung
  - Fahrzeugvermittlung (vorbestellt)

Fragen

Literaturverzeichnis

[1] David Easley, Jon Kleinberg: *„Network, Crowds, and Markets: Reasoning about a highly connected world*" , 2010; Chapter 10: Matching markets

[2] Wirtschaftslexikon Gabler: Definition Preis

http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/preis.html

[3] Wirtschaftslexikon Gabler: Definition Gleichgewichtspreis

http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/gleichgewichtspreis-eines-gutes.html

[4] E.A. Dinic: *„Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation";* UDC 518.5; Dokl. Akad. Nauk SSSR Tom 194 (1970), No.4; Soviet Math. Dokl. Vol.11(1970), No.5

[5] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein: *„Algorithmen – eine Einführung*"; 2007, 2. Auflage, Oldenburg Verlag

[6] Wikipedia: Definition Auktion

http://de.wikipedia.org/wiki/Auktion

[7] Wirtschaftslexikon Gabler: Definition Markt

http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/markt.html

Backup: Bezug zur Single-Item Auktion

- In einer Single-Item Auktion gibt es lediglich einen Verkäufer, der ein Item versteigert, sowie n Käufer.
- Jeder Käufer hat eine Bewertung für dieses Item.
- Um das Modell basierend auf dem Perfekten Matching anwenden zu können, müssen zusätzlich (genau n-1) sogenannte „fake“-Verkäufer geschaffen werden
- Die Käufer haben dann eine Bewertung von 0 für das Item eines „fake“-Verkäufers und eine Bewertung von 1 für das Item des realen Verkäufers.
- Die Menge von markträumenden Preisen wird mit dem bereits beschriebenen Auktions-Verfahren ermittelt.