Einführung in die
Künstliche Intelligenz
WS 10/11 - Prof. Dr. J. Fürnkranz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Beispiellösung für das 5. Übungsblatt (19.01.2011)

Aufgabe 1 Alltagswahrscheinlichkeiten

a) Da es sich um eine ideale Münze handelt, ist jede mögliche Münzwurf-Sequenz gleich wahrscheinlich, und zwar $(0.5)^{10}$. Von allen möglichen 10-er Sequenzen existiert nur eine, in der zehnmal Kopf geworfen wird. Für das Ereignis 5-mal Kopf und 5-mal Zahl gibt es offensichtlich mehr als eine Möglichkeit und ist somit klar wahrscheinlicher. Alice wird die Wette gewinnen.

b) Es ist hier zu beachten, dass die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Wurf Zahl fällt 0.5 ist. Das Ereignis wird weder wahrscheinlicher noch unwahrscheinlicher, wenn zuvor bereits 9-mal die Zahl geworfen wurde (siehe auch „Gambler's fallacy").
Aus a) wissen wir, dass Bob seinen Einsatz x sicher verlieren wird, falls er die zweite Wette verneint. Nimmt er die Wette an, verliert er zu 50% nichts und zu 50% verdoppelt sich der Verlust zu $2x$. Das bedeutet für den Erwartungswert $E_{Wette2}(Verlust) = x$. Da der Erwartungswert für beide Möglichkeiten identisch ist, sollte Bob indifferent bezüglich der Wahl sein (falls er *risikoneutral* ist).
In der Entscheidungstheorie gibt es für solche Fälle Konzepte, die Risikofreudigkeit als Parameter in den Entscheidungsprozess mit heranziehen. Falls Bob *risikoavers/risikoscheu* ist, d.h. eine geringere risikobehaftete Entscheidung präferiert (jedoch mit gleichem Erwartungswert) sollte er nicht auf die Zusatzwette eingehen.

c) In diesem Fall würde Bob die Wette gewinnen, da sein verstandenes Ereignis wie bei der zehnfachen Kopf Sequenz exakt einmal unter allen möglichen Sequenzen vorkommt. Somit ist die Wahrscheinlichkeit beider Ereignisse gleich und keines wahrscheinlicher als das andere. Bezüglich der Zusatzwette ändert sich nur, dass die Erwartungswerte der Entscheidungen nun beide einen Gewinn anstatt einem Verlust von x entsprechen.

Aufgabe 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

a) Wir zeigen (1) $\Leftrightarrow$ (2) und (1) $\Leftrightarrow$ (3).

- (1) $\Leftrightarrow$ (2)

$$P(a,b|c) = P(a|c) \cdot P(b|c) \Leftrightarrow \frac{P(a,b,c)}{P(c)} = P(a|c) \cdot P(b|c) \Leftrightarrow \frac{P(a,b,c)}{P(b,c)} = P(a|c) \Leftrightarrow P(a|b,c) = P(a|c)$$

- (1) $\Leftrightarrow$ (3)

$$P(a,b|c) = P(a|c) \cdot P(b|c) \Leftrightarrow \frac{P(a,b,c)}{P(c)} = P(a|c) \cdot P(b|c) \Leftrightarrow \frac{P(a,b,c)}{P(a,c)} = P(b|c) \Leftrightarrow P(b|a,c) = P(b|c)$$

b) Nur (2) liefert ausreichend Informationen um $P(h|e_1,e_2) = \frac{P(h,e_1,e_2)}{P(e_1,e_2)} = \frac{P(e_1,e_2|h) \cdot P(h)}{p(e_1,e_2)}$ zu bestimmen.

c) Nun sind auch die Informationen aus (1) $P(h|e_1,e_2) = \frac{P(h,e_1,e_2)}{P(e_1,e_2)} = \frac{P(e_1|h,e_2) \cdot P(e_2,h)}{p(e_1,e_2)} = \frac{P(e_1|h) \cdot P(e_2|h) \cdot P(h)}{p(e_1,e_2)}$ und (3) $P(h|e_1,e_2) = \frac{P(h,e_1,e_2)}{P(e_1,e_2)} = \frac{P(e_1|h,e_2) \cdot P(e_2,h)}{p(e_1,e_2)} = \frac{P(e_1|h) \cdot P(e_2|h) \cdot P(h)}{p(e_1,e_2)}$ ausreichend um $P(h|e_1,e_2)$ zu bestimmen. Bei (3) fehlt noch $P(e_1,e_2)$. Da man aber mittels $\mathbf{P}(E_1|H) \cdot \mathbf{P}(E_2|H) \cdot \mathbf{P}(H) = \mathbf{P}(E_1,E_2,H)$ die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle erhält, lasst sich $p(e_1,e_2)$ daraus bestimmen.

Aufgabe 3 Monty-Hall-Problem

In zwei von drei Fällen wird die erste Wahl auf ein Tor mit einer Niete gefallen sein. In diesen Fällen wird wiederum, da hier die Wahl des Moderators eindeutig ist, hinter dem anderen Tor sicher der Gewinn liegen. Die Entscheidung das andere Tor zu nehmen hat somit eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

Für die andere Strategie beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. Es ist hier zu beachten, dass der Moderator in Abhängigkeit von der ersten Tor-Wahl des Kandidaten die Tore öffnet und die erste Wahl bekannt ist. Die intuitive Gewinnwahrscheinlichkeit beider Entscheidungen von $\frac{1}{2}$ würde gelten, wenn nachdem ein Nietentor geöffnet wurde, die Objekte (ein Gewinn, eine Niete) hinter den Toren nochmals gleichmässig zufällig platziert würden.

Der Kandidat sollte somit das andere Tor wählen.

Aufgabe 4 Bayes'sches Netz

a) Gesucht ist $P(W|\neg D, G)$.

$$\begin{aligned}
P(W|\neg D, G) &= \frac{P(G, W, \neg D)}{P(G, \neg D)} \\
&= \frac{P(G, W, \neg D, L) + P(G, W, \neg D, \neg L)}{P(G, W, \neg D, L) + P(G, W, \neg D, \neg L) + P(G, \neg W, \neg D, L) + P(G, \neg W, \neg D, \neg L)} \\
&= \frac{0.1296}{0.1296 + 0.0512} \approx 0.7168
\end{aligned}$$

mit Benutzung von:

$$\begin{aligned}
P(G, W, \neg D, L) + P(G, W, \neg D, \neg L) &= P(G|W)P(W|L, \neg D)P(L)P(\neg D) + P(G|W)P(W|\neg L, \neg D)P(\neg L)P(\neg D) \\
&= 0.0864 + 0.0432 = 0.1296 \\
P(G, \neg W, \neg D, L) + P(G, \neg W, \neg D, \neg L) &= P(G|\neg W)P(\neg W|L, \neg D)P(L)P(\neg D) + P(G|\neg W)P(\neg W|\neg L, \neg D)P(\neg L)P(\neg D) \\
&= 0.0288 + 0.0224 = 0.0512
\end{aligned}$$

b)

L	W	D	G	$P(L, W, D, G)$
T	T	T	T	$0.2268 = P(G \mid W) \cdot P(W \mid D, L) \cdot P(D) \cdot P(L)$
T	T	T	F	$0.0252 = P(\neg G \mid W) \cdot P(W \mid D, L) \cdot P(D) \cdot P(L)$
T	T	F	T	$0.0864 = \ldots$
T	T	F	F	0.0096
T	F	T	T	0.0216
T	F	T	F	0.0864
T	F	F	T	0.0288
T	F	F	F	0.1152
F	T	T	T	0.108
F	T	T	F	0.012
F	T	F	T	0.0432
F	T	F	F	0.0048
F	F	T	T	0.024
F	F	T	F	0.096
F	F	F	T	0.0224
F	F	F	F	0.0896

c) Gegebene Variablenreihenfolge : D, G, L, W.

1. Iteration: Variable D wird zum Netzwerk hinzugefügt. Da das Netzwerk bisher nur aus D besteht, findet keine Überprüfung nach möglichen Eltern statt.

2. Iteration: In der zweiten Iteration wird G hinzugefügt und überprüft, ob eine Kante von D nach G gelegt werden muss, also ob eine direkter Einfluß von D auf G vorliegt. Dazu wird überprüft, ob G unabhängig von D ist, d.h. ob $P(G|D) = P(G)$ gilt. Aus der Tabelle bestimmen wir mittels *Marginalization*
$P(G) = 0.5612$ und

$P(G|D) = 0.634$.
Da G und D somit nicht unabhängig sind, kann D als Elternteil von G angesehen werden und es wird eine Kante von D nach G gelegt.

3. Iteration: Variable L wird zum Netzwerk hinzugefügt und es wird erneut ermittelt, welche Variablen als Elternteile in Frage kommen: $P(L|G, D) = P(L)$?
$P(L|G, D) \approx 0.653$
$P(L) = 0.6$
Da L nicht unabhängig von G, D ist, kann mindestens eins der beiden Variablen als Elternknoten benutzt werden.
$P(L|G, D) = P(L|D)$?
$P(L|D) = 0.6 \neq P(L|G, D)$
Die obige Überprüfung besagt, dass L von G gegeben D nicht unabhängig ist. Es wird eine Kante von G nach L eingefügt. Es bleibt noch zu prüfen, ob auch L von D abhängig ist.
$P(L|G, D) = P(L|G)$?
$P(L|G) \approx 0.648 \neq P(L|G, D)$
Es muss also auch eine Kante von D nach L eingefügt werden.

4. Iteration: Als letzte Variable wird W zum Netzwerk hinzugefügt. Wir überprüfen erneut, von welchen Variablen W abhängig ist.
$P(W|L, G, D) = P(W)$?
$P(W|L, G, D) \approx 0.913$
$P(W) = 0.516 \neq P(W|L, G, D)$
$P(W|L, G, D) = P(W|L)$?
$P(W|L) = 0.58 \neq P(W|L, G, D)$
$P(W|L, G, D) = P(W|G)$?
$P(W|G) \approx 0.826 \neq P(W|L, G, D)$
$P(W|L, G, D) = P(W|D)$?
$P(W|D) = 0.62 \neq P(W|L, G, D)$
$P(W|L, G, D) = P(W|L, G)$?
$P(W|L, G) \approx 0.861 \neq P(W|L, G, D)$
$P(W|L, G, D) = P(W|L, D)$?
$P(W|L, D) = 0.7 \neq P(W|L, G, D)$
$P(W|L, G, D) = P(W|G, D)$?
$P(W|G, D) \approx 0.88 \neq P(W|L, G, D)$
$\rightarrow$ Von allen bisherigen Knoten im Netzwerk muss eine Kante nach W eingefügt werden. Das gelernte Bayes'sche Netz stellt den Worst-Case dar.