Rangfolgenbildung und Spielvorhersage mit Massey's Methode

Julius Stecher

Prof. Johannes Fürnkranz
Knowledge Engineering Group

Übersicht

Ranking: Problemstellung und Definitionen

Einführung in Massey's Methode

- Das idealisierte Modell für zwei Teams und ein Spiel
- Erweiterung auf Ligen mit n Teams und m (abgeschlossenen) Spielen
- Probleme mit dem idealisierten Ansatz und Lösungen
  - Methode der kleinsten Quadrate
  - Anwendung in (basic) Massey Rating Method und Beispiel

Erweiterungen der Basismethode

- Offensiv- und Defensivstatistiken
- Eigenschaften von Massey's Ratingmethode

Varianten von Massey's Methode in der Praxis

- Bowl Championship Series
- Ranking von Webseiten

Autor der Methode

Erfunden 1997 vom damaligen Studenten Kenneth Massey (Bluefield College)

- Entwickelte für seine Abschlussarbeit ein Ratingsystem für College- Football
- Wird hier als „Massey's Methode“ bezeichnet; es gibt aber mehrere
- Heute: Professor für Mathematik, Carson-Newman College
  - Entwickelt dort seine Ratingmodelle weiter

Ranking: Problemstellung und Definitionen
Problemstellung und gesuchte Lösung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Gegeben

- In Konkurrenz zueinander stehende Akteure
- In einer Konfrontation: stets zwei Akteure gegeneinander
  - Sieger bekannt
- Quantitative Evaluation jeder Konfrontation
  - Abstand des Siegers zum Unterlegenen pro Konfrontation bekannt

Gesucht

- Rangfolge aller Akteure nach einer Menge von Konfrontationen
- Möglichkeit, zukünftige Konfrontationen abzuschätzen
  - Annahme 1: relative Leistung eines Akteurs relativ konstant
  - Annahme 2: Ausreichende Datenbasis

Ranking: Problemstellung und Definitionen
Übertragung auf den Sport und Formalisierung

Gegeben

- n Teams $t_{1,} t_{2,} \ldots, t_n$
- m Spiele und deren Ausgang
- In der Regel: m >> n
  - Sonst sowieso keine gute Aussage möglich

Gesucht

- Rating- Rangfolge $r_a \geq r_b \geq r_c \geq \ldots \geq r_n$
- Vorhersagemöglichkeit für Spiel k mit Teams i und j: $predict_k(t_i, t_j) = y_k$

Einführung in Massey's Methode
Zwei Teams und ein Spiel: Vorhersage

Annahme:

- Ratings zweier Teams berechnet: $r_i \, und \, r_j$

Intention:

- Ratings selbst sind direkt auch Abschätzung neuer Spielergebnisse
- Idealisiert: $predict_k(t_i, t_j) = r_i - r_j = y_k$
- Wobei y_k Vorhersage des Ergebnisses von Spiel k ist (margin of victory)

Einführung in Massey's Methode
Erweiterung auf Ligen

Ein Spiel, zwei Teams:

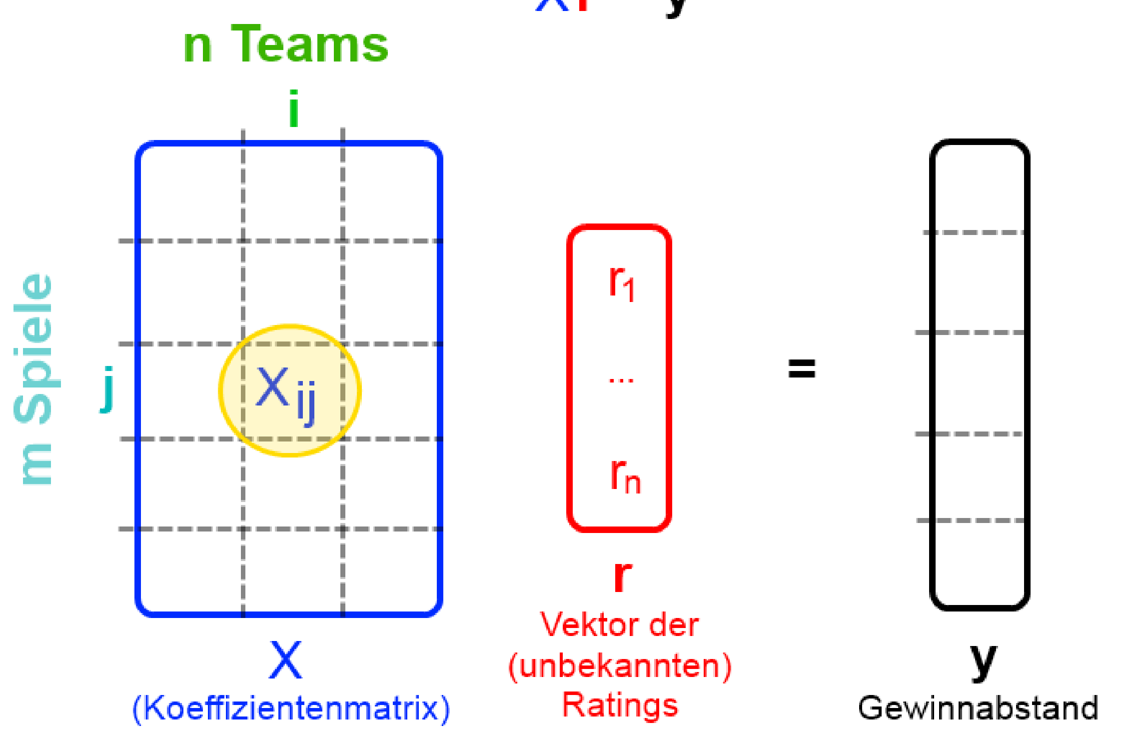
- Lineare Gleichung: $predict_k(t_i, t_j) = r_i - r_j = y_k$
- 2 Unbekannte: die Ratings beider beteiligten Teams $r_i \, und \, r_j$
- Trivial: kann nicht aufgelöst werden

m Spiele, je zwei Teams:

- m lineare Gleichungen obiger Form, eine pro Spiel k: $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$
- … mit **n** Unbekannten $r_1, r_2, \ldots, r_n$
  - Nämlich genau die gesuchten Ratings aller Teams
- … ergibt: lineares Gleichungssystem! $Xr = y$

Einführung in Massey's Methode
Erweiterung auf Ligen

$$X r = y$$



Gewinnabstand in Punkten für Siegerteam (bekannt)
pro Spiel ein Eintrag

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if team i won game j} \\ -1, & \text{if team i lost game j} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Einführung in Massey's Methode
Probleme und Verbesserungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

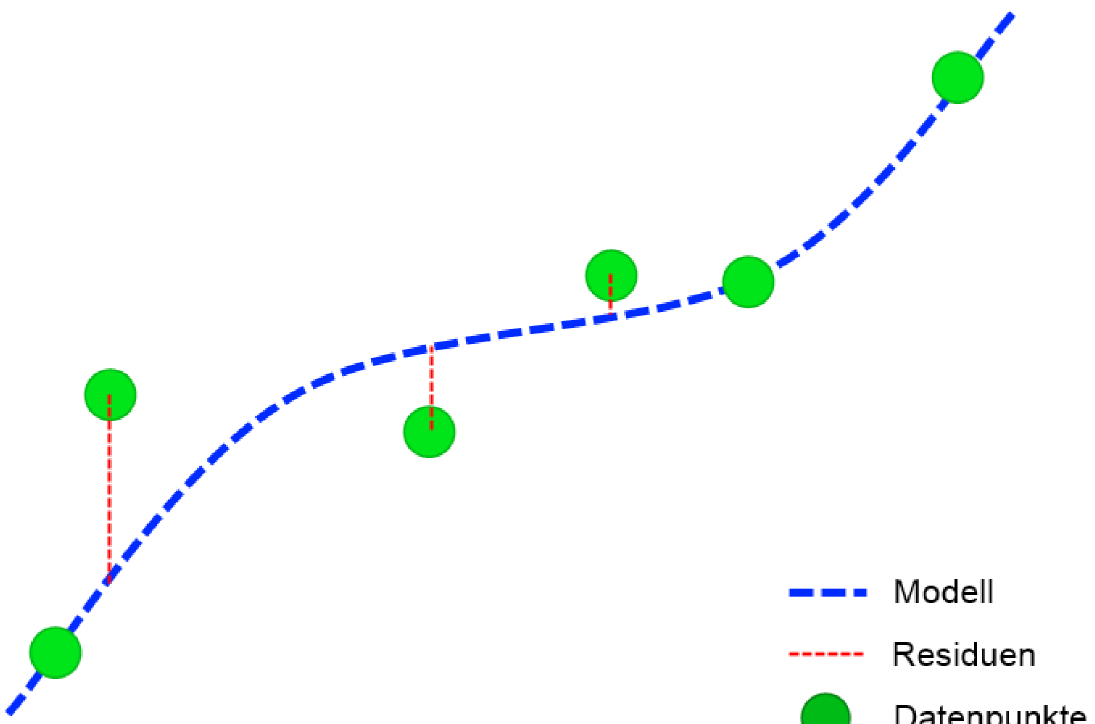
Eigenschaften des LGS

- Überbestimmt (m >> n)
- Inkonsistent (aus natürlichen Daten)
    - Kleine Widersprüche; da menschliche Sportlerteams

Methode der kleinsten Quadrate

- Ist mathematische Optimierungsmethode (Ausgleichsrechnung)
- Intention: aus sehr vielen, “nicht ganz” konsistenten Daten...
    - Auf ein zugrundeliegendes rauschfreies **Modell** schließen
- Wie der Name schon sagt: minimiere die Summe...
    - Der quadrierten Abweichungen (Residuen) vom Modell

Einführung in Massey's Methode
Methode der kleinsten Quadrate



Einführung in Massey's Methode
Normalengleichungen

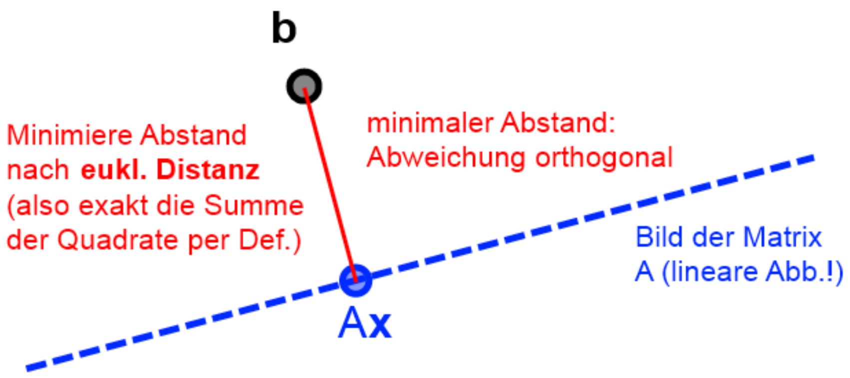
Gegeben

– Matrixgleichung $A\vec{x}=\vec{b}$

Gesucht

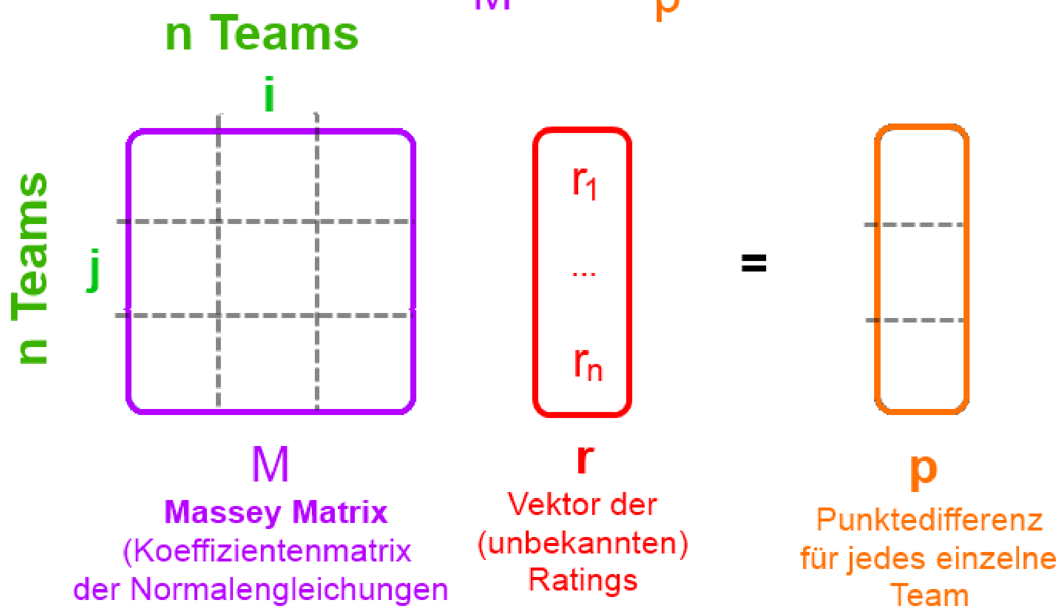
– Gleichung, die die Summe der Quadratdifferenzen auf beiden Seiten minimiert

- Normalengleichung $A^T A\vec{x}=A^T\vec{b}$
- Geometrische Intention: Abstand Ax zu b minimieren – das ist der Fall wenn Fehlervektor orthogonal auf Bild(A)
- Lässt daher den „besten Fehler“ als Lösung zu



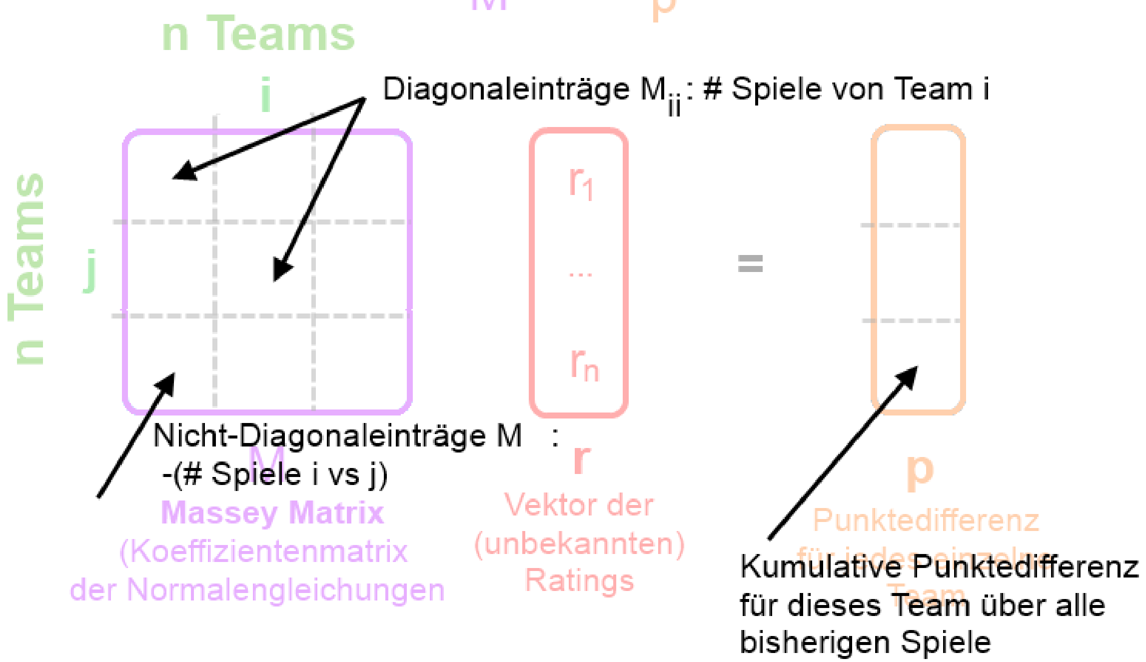
Schöner:

$$\underbrace{X^T X}_{M}\, \mathbf{r} = \underbrace{X^T}_{p} \mathbf{y}$$



Einführung in Massey's Methode
Massey und Normalengleichungen

$$\underbrace{X^T X}_{M} r = \underbrace{X^T y}_{p}$$



… die Massey- Matrix und p können direkt bestimmt werden!

Einführung in Massey's Methode
Letztes Problem

Letztes Hindernis: rank(M) < n

- Die Zeilen summieren sich zu Null auf!
- Die Spalten sind linear abhängig; Das System hat keine eindeutige Lösung

Lösung: rank(M) == n garantieren

- Irgendeine Zeile in M durch Einsen ersetzen
- Entsprechenden Eintrag in p durch Null ersetzen
- Effekt: zusätzliche Bedingung an das System
  - Die Ratings (Komponenten des Lösungsvektors) summieren zu 0
  - Jetzt hat die Koeffizientenmatrix M vollen Rang

Einführung in Massey's Methode
Miniaturbeispiel

Folgende Beispielliga:

- Team A, B und C ($n = 3$)
- Bereits absolvierte Spiele: ($m = 4$)
  - A vs B; A gewinnt 10:5 (Gewinnmarge 5)
  - B vs C; B gewinnt 15:5 (Gewinnmarge 10)
  - A vs C: A gewinnt 10:8 (Gewinnmarge 2)
  - A vs B: A gewinnt 8:6 (Gewinnmarge 2)
- C hat also 2 Spiele absolviert, A und B jeweils 3.
  - Für deutlicheres Beispiel
- Jedes Team ist jedem anderem Team mindestens einmal begegnet
- Wie wir gesehen haben, können wir direkt mit M und p anfangen
  - Werden wir hier aber nicht, um das Beispiel besser verfolgen zu können

Einführung in Massey's Methode

Originales Gleichungssystem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{array}{r} A \text{ vs } B \\ B \text{ vs } C \\ A \text{ vs } C \\ A \text{ vs } B \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \\ 1 & -1 & \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

X
(Koeffizientenmatrix)

r
Vektor der (unbekannten) Ratings

y
Gewinnabstand in Punkten für Siegerteam (bekannt)
pro Spiel ein Eintrag

$$
X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if team i won game j} \\ -1, & \text{if team i lost game j} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

Einführung in Massey's Methode
Normalengleichungen

$$\underbrace{X^T X}_{M} \mathbf{r} = \underbrace{X^T}_{p} \mathbf{y}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \boxed{\begin{array}{ccc} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}} \end{array} \boxed{\begin{array}{c} r_A \\ r_B \\ r_C \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} 9 \\ 3 \\ -12 \end{array}}$$

M

Massey Matrix
(Koeffizientenmatrix
der Normalengleichungen

r

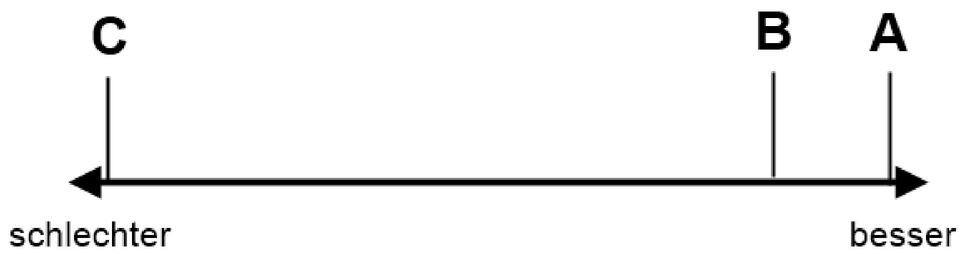
Vektor der
(unbekannten)
Ratings

p

Punktedifferenz
für jedes einzelne
Team

..danach: letzte Reihe von M := 1
letzter Eintrag von p := 0

Einführung in Massey's Methode
Lösung



Team A: 2,6
Team B: 1,4
Team C: -4,0

Erweiterung der Basismethode
Offensiv- und Defensivwerte

Mit Massey's System:

- Wir haben jetzt Ratings für jedes Team.
- Interessant wäre aber noch: Trennung zwischen Offensive und Defensive
  - Zwei neue Ratingvektoren o und d
  - Es soll sein: r = o+d
  - Betrachten wir den Vektor p (kumulative Punktdifferenz pro Team)
    - Es sei f der Vektor aller gesamten Punkte des Teams
    - .. und a der Vektor aller Punkte, die das Team „einstecken“ musste.
    - Also p = f („points for“) - a („points against“).
  - Zwei neue Matrizen T und P
  - Es soll sein: M = T – P
    - T ist Diagonalmatrix, die #Spiele des Teams enthält
    - P enthält #(paarweise Matchups) zwischen Teams

Erweiterung der Basismethode
Ein paar Substitutionen

Mit dieser Notation jetzt:

$$M\vec{r} = p$$
$$(T-P)\vec{r} = p$$
$$(T-P)(\vec{o}+\vec{d}) = p$$
$$T\vec{o} - P\vec{o} + T\vec{d} - P\vec{d} = p$$
$$T\vec{o} - P\vec{o} + T\vec{d} - P\vec{d} = \vec{f} - \vec{a}$$

… das kann aufgeteilt werden in $T\vec{o} - P\vec{d} = \vec{f}$ **und** $P\vec{o} - T\vec{d} = \vec{a}$

– $T\vec{o} - P\vec{d} = \vec{f}$ sagt: #(Punkte eines Teams) kann gebildet werden durch:
#(Spiele des Teams) x (Offensivwert des Teams)
–
Summe aller Defensivwerte sämtlicher Gegner

Erweiterung der Basismethode
Offensiv- und Defensivwerte herleiten

Wir verwenden jetzt die linke Gleichung $T\vec{o} - P\vec{d} = \vec{f}$ **zur Herleitung.**

$$T\vec{o} - P\vec{d} = \vec{f}$$
$$T(\vec{r} - \vec{d}) - P\vec{d} = \vec{f}$$
$$T\vec{r} - T\vec{d} - P\vec{d} = \vec{f}$$
$$T\vec{r} = T\vec{d} + P\vec{d} + \vec{f}$$
$$T\vec{r} - \vec{f} = T\vec{d} + P\vec{d}$$

Der Ratingvektor r ist ja bereits bekannt! Wir erhalten wieder ein Gleichungssystem

- Mit bekannter Koeffizientenmatrix (T+P)
- Mit unbekanntem Defensivvektor d
- Mit bekannter rechter Seite Tr – f

$$(T + P)\vec{d} = T\vec{r} - \vec{f}$$
$$A\vec{d} = \vec{b}$$

Haben wir jetzt r und d, können wir o wegen r = o+d auch berechnen!

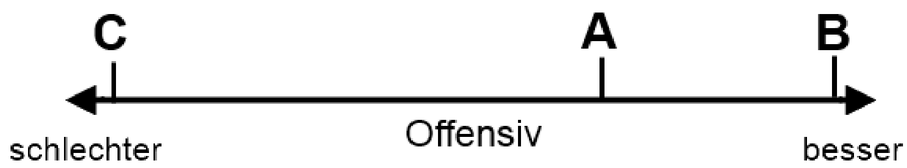
Erweiterung der Basismethode
Für unser kleines Beispiel

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ M \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ 1 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} \\ \mathbf{r} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} \\ \mathbf{p} \end{array}$$

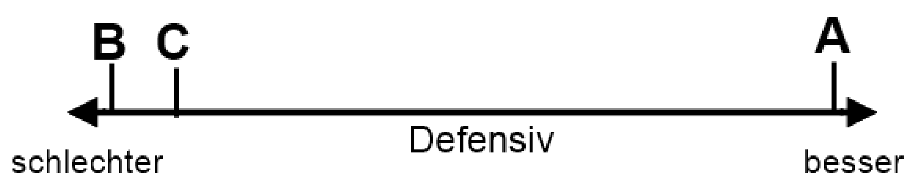
$$\underset{T}{\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{P}{\begin{pmatrix} & 2 & 1 \\ 2 & & 1 \\ 1 & 1 & \end{pmatrix}} \quad \underset{f}{\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{a}{\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{T+P}{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{d}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}} = \underset{Tr - f}{\begin{pmatrix} -4{,}2 \\ -7 \\ -5{,}2 \end{pmatrix}}$$

Erweiterung der Basismethode
Für unser kleines Beispiel: Ergebnisse



Team A	**1,95**
Team B	**3,55**
Team C	**-2,15**



Team A	**0,65**
Team B	**-2,15**
Team C	**-1,85**

Erweiterung der Basismethode
Nützliche Eigenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Benutzung von domänerelevanter Metrik

- Im Sport: Tore, Körbe, jede Art von Score
- Für jeden Kontext geeignet
  - solange ein paarweiser Vergleich („Match“) möglich ist

Erweiterte Vorhersagen möglich

- Es gibt Offensiv- und Defensivstatistiken
- Unterscheiden diese sich stark für ein Team, sind seine Leistungen möglicherweise stärker schwankend
  - Es können neben einer Vorhersage über den exakten Ausgang eines Matchups auch +/- Werte abgeschätzt werden (spätere Kapitel)

Massey's Methode in der Praxis
Bowl Championship Series

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Bowl Championship Series

- Ratingsystem für College- Football
  - Zweck: bestimmen von Matchups
- Ratings setzen sich aus menschlichem Input und Computerberechnungen zusammen
  - Menschlicher Input: Medien, Trainer der Teams
  - Maschineller Input: 6 verschiedene Modelle
    - Eine davon ist eine Variante von Massey's Methode
    - Details zu dieser nicht völlig bekannt
    - Auf Massey's Webseite mehr Infos: masseyratings.com
- Das BCS System ist sehr kontrovers
  - Besonders zwei Saisons: 2001 und 2003
  - Wird statt Qualifikationsspielen eingesetzt
    - Daher hängt für die Teams viel davon ab

Massey's Methode in der Praxis

masseyratings.com

Beispiel: Massey- Werte für TCU Horned Frogs

Texas Christian University Horned Frogs
Amon G. Carter Stadium | Fort Worth, TX

cbase2014 Previous More

cbase2014 | NCAA | NCAA I | Big 12 Inter/Intra Scheduled

Ranking:	1	Record	48-16
Schedule:	19	PF-PA:	327-170
Offense:	39	Per Game:	5.1-2.7
Defense:	2		

Date		Opponent		Result	PF	PA
Fri 2014-02-14		Jacksonville	282 (21-33)	W	5	0
Sat 2014-02-15		Jacksonville	282 (21-33)	W	5	1
Sun 2014-02-16		Jacksonville	282 (21-33)	L	0	2
Tue 2014-02-18		N Colorado	551 (10-43)	W	10	3
Fri 2014-02-21	vs	BYU	161 (22-31)	W	10	0
Sat 2014-02-22	at	TAM C. Christi	120 (31-27)	W	7	4
Sun 2014-02-23	vs	UT San Antonio	70 (35-26)	W	5	1

Massey's Methode in der Praxis
Ranking von Webseiten

Wir brauchen:

- Das Konzept eines „Matches“ zwischen zwei Webseiten: Vergleich eines Werts
  - z.B. gemessenes Datenübertragungsvolumen
  - Oder besser: PageRank- Measure

Wir erhalten:

- Ein relatives Ranking der Webseiten
- Je nach Vergleichsmetrik auch verwertbare Aussage über „Abstand“ zwischen zwei Webseiten
- Offensiv- und Defensivwerte!
  - Für Webseiten??
  - Je nach Metrik kann das viel Sinn machen!
    - z.b. Seiten mit vielen relevanten(!) Links zu einem Thema
    - vs Seiten mit viel direkter Information zu einem Thema
    - = „hubs“ vs „authorities“ im HITS- Algorithmus