Offense-Defense Rating Method

Kwang-Soo Park

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Inhalt

- Entstehung
- OD Rating Methode
- Mathematische Analyse
- Anwendungsbeispiel

Entstehung

- Hypertext Induced Topic Search (HITS) von Jon Kleinberg, 1999
- Ranking für Webseiten, Vorläufer von PageRank
- Verbindung OD-Methode und Sinkhorn-Knopp Theorem durch Anjela Govan, Amy Langville, Carl Meyer

Entstehung

- HITS beruht auf „Hubs and Authorities“
- Graph mit Webseiten als Knoten
- Eine Webseite besitzt „hub rating“ und „authority rating“
  - „hub rating“: Qual./Quan. ausgehender Links
  - „authority rating“: Qual./Quan. eingehender Links

- Beide Ratings voneinander abhängig

Entstehung - HITS

$$L_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ falls Weg von Knoten i zu Knoten j existiert} \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Zufälligen Ratingvektor (meistens $a_0 = e$) nehmen

„hub rating" und „authority rating" iterativ berechnen:

$$a_{(k+1)} = L^T * h_k \qquad h_k = L * a_k$$

Abhängigkeiten beheben:

$$a_{(k+1)} = L^T * L * a_k \quad h_{(k+1)} = L * L^T * h_k$$

Inhalt

- Entstehung
- OD Rating Methode
- Mathematische Analyse
- Anwendungsbeispiel

Offense-Defense (OD) Rating Methode

- Offensive rating $o_i > 0$
- Defensive rating $d_i > 0$
- OD matrix

$$A=[a_{(ij)}]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

- <u>OD Ratings:</u>

$$o_j=\frac{a_{(1j)}}{d_1}+\frac{a_{(2j)}}{d_2}+\ldots+\frac{a_{(mj)}}{d_m}$$

große Werte => starke Offensive

$$d_i=\frac{a_{(i1)}}{o_1}+\frac{a_{(i2)}}{o_2}+\ldots+\frac{a_{(im)}}{o_m}$$

große Werte => schwache Defensive

OD Rating Methode

- Starten mit einem Initialvektor $d_0 = (1,1,1,\ldots,1)^T = e$
- Iteratives Berechnen der Sequenzen $\{d_{0,} d_{1,} d_2 \ldots\}, \{o_{1,} o_{2,} o_{3,} \ldots\}$
- Konvergieren die Sequenzen, dann sind die OD Ratings die Komponenten der Grenzwerte

$$\lim_{k \to \infty} o_k = o = (o_{1,} o_{2,} \ldots, o_m)^T \quad \lim_{k \to \infty} d_k = d = (d_{1,} d_{2,} \ldots, d_m)^T$$

OD Rating Methode

- Schreibweise: sei $x=(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_m)^T$ dann sei

  $x^{\$}=(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_m})^T$ der Vektor der Kehrwerte

- Dadurch ergibt sich allgemein $o=A^T * d^{\$}$ $d=A * o^{\$}$

  alternierender Prozess (mit Startvektor):

$$o_k=A^T * (d_{(k-1)})^{\$} \qquad d_k=A * (o_k)^{\$}$$

OD Rating Methode

- Beheben der Abhängigkeiten:

$$o_k = A^T * (d_{(k-1)})^\$$$
$$d_k = A * (o_k)^\$$$

$$o_k = A^T * (A * (o_{(k-1)})^\$)^\$$$
$$d_k = A * (A^T * (d_{(k-1)})^\$)^\$$$

- Kombinieren zum Gesamtrating

$$r_i = \frac{o_i}{d_i}$$

OD Rating Methode Bsp.

$$A = \begin{array}{c} \\ DUKE \\ MIAMI \\ UNC \\ UVA \\ VT \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} DUKE & MIAMI & UNC & UVA & VT \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 52 & 24 & 38 & 45 \\ 7 & 0 & 16 & 17 & 7 \\ 21 & 34 & 0 & 5 & 30 \\ 7 & 25 & 7 & 0 & 52 \\ 0 & 27 & 3 & 14 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rank	Team	Overall Rating
1	VT	279.8
2	MIAMI	188.8
3	UVA	84.8
4	UNC	41.8
5	DUKE	20.1

Nach k=9 Iterationen...

Team	Off. Rating (rank)	Def. Rating (rank)
DUKE	33.99 (5)	1.691 (5)
MIAMI	151.6 (1)	0.8029 (2)
UNC	48.66 (4)	1.164 (4)
UVA	82.05 (3)	0.9675 (3)
VT	114.8 (2)	0.4104 (1)

OD Rating Methode Bsp.

- Statt Punkte andere Statistiken (z.B. yards gained, average points per game etc.)

$$A = \begin{array}{c} \\ DUKE \\ MIAMI \\ UNC \\ UVA \\ VT \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} DUKE & MIAMI & UNC & UVA & VT \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 557 & 357 & 315 & 362 \\ 100 & 0 & 188 & 452 & 167 \\ 209 & 321 & 0 & 199 & 338 \\ 207 & 500 & 270 & 0 & 552 \\ 35 & 304 & 196 & 334 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nach k=6 Iterationen...

Rank	Team	Yards Rating
1	MIAMI	2016
2	VT	1885
3	UVA	1096
4	UNC	1036
5	DUKE	451.6

Team	Off. Rating (rank)	Def. Rating (rank)
DUKE	537.3 (5)	1.1900 (4)
MIAMI	1608 (1)	0.7975 (2)
UNC	1024 (4)	0.9886 (3)
UVA	1537 (2)	1.4020 (5)
VT	1249 (3)	0.6629 (1)

Inhalt

- Entstehung
- OD Rating Methode
- Mathematische Analyse
- Anwendungsbeispiel

Mathematische Analyse

- Wenn die OD Sequenzen nicht konvergieren, existieren keine Ratings

$$\lim_{k \to \infty} o_k = o = (o_{1,} o_{2,} \ldots, o_m)^T \quad \lim_{k \to \infty} d_k = d = (d_{1,} d_{2,} \ldots, d_m)^T$$

- Sinkhorn-Knopp Theorem! → OD Theorem!
- Um Konvergenz zu zeigen, benötigen wir mehr mathematische Definitionen (Sinkhorn-Knopp Prozess, Diagonale)

Mathematische Analyse Sinkhorn-Knopp Prozess

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- OD Methode hängt mit schrittweiser Skalierung bzw. Ausgleichen der Matrix A zusammen
- Erst Spaltenskalierung: Spaltensummen sind 1

  danach Zeilenskalierung: Zeilensummen sind 1
- Mathematisch ausgedrückt:

  Multiplikation mit zwei diagonalen Skalierungsmatrizen $C_{1,} R_1$, sodass in $A*C_1$ alle Spaltensummen 1 und in $R_1*\left(A*C_1\right)$ alle Zeilensummen 1 sind

Mathematische Analyse Sinkhorn-Knopp Prozess

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wenn:

$$C_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \xi_m \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \xi_i = \frac{1}{[e^T * A]_i}$$

(Inverse der i-ten Spaltensumme)

$$R_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \rho_m \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \rho_i = \frac{1}{[(A * C_1) * e]_i}$$

(Inverse der i-ten Zeilensumme)

Dann gilt: $R_1 * A * C_1 * e = e$

Mathematische Analyse
Sinkhorn-Knopp Prozess

Bsp:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^T * A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A * C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 3/7 \\ 4/5 & 0 & 4/7 \\ 1/5 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A * C_1) * e = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 3/7 \\ 4/5 & 0 & 4/7 \\ 1/5 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/21 \\ 48/35 \\ 8/15 \end{pmatrix}$$

$$R_1 * A * C_1 = \begin{pmatrix} 21/23 & 0 & 0 \\ 0 & 35/48 & 0 \\ 0 & 0 & 15/8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 3/7 \\ 4/5 & 0 & 4/7 \\ 1/5 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14/23 & 9/23 \\ 7/12 & 0 & 5/12 \\ 3/8 & 5/8 & 0 \end{pmatrix}$$

Mathematische Analyse Sinkhorn-Knopp Prozess

- Spalten- und Zeilensummen nicht immer 1
- Alternierendes Skalieren wiederholen bis

$$S_k = R_k * \cdots * R_2 * R_1 * A * C_1 * C_2 * \cdots * C_k \qquad S_k * e = e$$

- Matrix S heißt <u>*stochastisch*</u>, wenn sie nicht-negative Elemente besitzt und alle Zeilensummen = 1
- Sind dazu noch die Spaltensummen = 1, dann ist S <u>*doppelt stochastisch*</u>
- Also: S_k ist doppelt stochastisch

Mathematische Analyse Diagonale

- Es gibt mehr als nur die Hauptdiagonale
- Sei $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ eine Permutation, dann ist die *Diagonale von A zu* σ so definiert: $\{a_{(1\sigma_1)}, a_{(2\sigma_2)}, \ldots, a_{(m\sigma_m)}\}$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Permutation	allgemein	Diagonale
(1, 2, 3)	$\{a_{11,} a_{22,} a_{33}\}$	{1, 5, 9}
(1, 3, 2)	$\{a_{11,} a_{23,} a_{32}\}$	{1, 6, 8}
(2, 1, 3)	$\{a_{12,} a_{21,} a_{33}\}$	{2, 4, 9}
(2, 3, 1)	$\{a_{12,} a_{23,} a_{31}\}$	{2, 6, 7}
(3, 1, 2)	$\{a_{13,} a_{21,} a_{32}\}$	{3, 4, 8}
(3, 2, 1)	$\{a_{13,} a_{22,} a_{31}\}$	{3, 5, 7}

Mathematische Analyse Sinkhorn-Knopp Theorem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei A eine nicht-negative Matrix.

- Prozess der Spalten- und Zeilenskalierung konvergiert gegen einen doppelt stochastischen Grenzwert S <=>

  In A existiert mindestens eine strikt positive Diagonale. Dann sagt man A wird *unterstützt*. („A is said to *have support*")

  (Das ist für S_k, aber was ist mit den Produkten $\hat{C}_k = C_1 * C_2 * \cdots * C_k$, $\hat{R}_k = R_k * \cdots * R_2 * R_1$?)

- Die Grenzwerte

$$\lim_{k \to \infty} \hat{C}_k = C \qquad \lim_{k \to \infty} \hat{R}_k = R$$

  existieren und $R * A * C = S$ ist doppelt stochastisch <=>

  Jedes positive Element in A liegt auf einer positiven Diagonale. Dann sagt man A wird *vollständig unterstützt*. („A is said to *have total support*")

Mathematische Analyse
OD Theorem

- Anwendung Sinkhorn-Knopp auf OD Rating
- Notation:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \Longleftrightarrow diag\{x\}=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m \end{pmatrix}$$

- Eigenschaften für Matrix D und Vektor v ohne Nullelemente:

$$diag\{(D*v)^{\$}\}=D^{-1}*diag\{v^{\$}\} \qquad diag\{(D*v^{\$})^{\$}\}=D^{-1}*diag\{v\}$$

- <u>OD Theorem</u>:

  Für eine OD Matrix A konvergieren die OD Sequenzen

$$o_k=A^T*(d_{(k-1)})^{\$} \qquad d_k=A*(o_k)^{\$}$$

  gegen die Vektoren o und d <=> A wird vollständig unterstützt

Mathematische Analyse
OD Theorem Beweis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\hat{C}_k = C_1 * C_2 * \cdots * C_k \qquad \hat{R}_k = R_k * \cdots * R_2 * R_1$$

- Beweisidee: Verbindung zwischen OD Sequenzen und diesen Produkten herstellen

$$\xi_i = \frac{1}{[e^T * A]_i}$$

$$\rho_i = \frac{1}{[(A * C_1) * e]_i}$$

$$C_1 = diag\{(A^T * e)^\$\} \qquad R_1 = diag\{(A * C_1 * e)^\$\}$$

$$C_2 = diag\{((R_1 * A * C_1)^T * e)^\$\} \qquad R_2 = diag\{(R_1 * A * C_1 * C_2 * e)^\$\}$$

usw.

- Die Produkte können anders ausgedrückt werden:

$$\hat{C}_k = diag\{c_k\} \qquad \hat{R}_k = diag\{r_k\}$$

mit $r_0 = e$ $\quad c_k = (A^T * r_{(k-1)})^\$ \quad r_k = (A * c_k)^\$$ für k=1,2,....

Mathematische Analyse
OD Theorem Beweis

- Iterativer Nachweis von $\hat{C}_k = diag\{c_k\}$ $\hat{R}_k = diag\{r_k\}$:

$$c_1 = (A^T * e)^{\$} \quad \Rightarrow \quad C_1 = diag\{c_1\} \text{ und } C_1 * e = c_1$$

$$R_1 = diag\{(A * C_1 * e)^{\$}\} = diag\{(A * c_1)^{\$}\} = diag\{r_1\}$$

$$C_2 = diag\{((R_1 * A * C_1)^T * e)^{\$}\} = diag\{(C_1 * A^T * R_1 * e)^{\$}\} = diag\{(C_1 * A^T * r_1)^{\$}\} = diag\{(C_1 * c_2^{\$})^{\$}\} = C^{-1} * diag\{c_2\}$$

$$\Rightarrow \hat{C}_2 = C_1 * C_2 = diag\{c_2\}$$

$$R_2 = diag\{(R_1 * A * C_1 * C_2 * e)^{\$}\} = diag\{(R_1 * A * c_2)^{\$}\} = diag\{(R_1 * r_2^{\$})^{\$}\} = R^{-1} * diag\{r_2\}$$

$$\Rightarrow \hat{R}_2 = R_1 * R_2 = diag\{r_2\}$$

Mathematische Analyse OD Theorem Beweis

- Bemerkung: Die Sequenzen $c_k = (A^T * r_{(k-1)})^\$$ $r_k = (A * c_k)^\$$ sind die Kehrwerte der OD Sequenzen:

$$c_k = o_k^\$ \qquad r_k = d_k^\$$$

- Iterativer Nachweis:

$$c_1 = (A^T * e)^\$ \quad \text{und} \quad o_1 = A^T * e^\$ = A^T * e \quad \Rightarrow \quad c_1 = o_1^\$$$

$$r_1 = (A * c_1)^\$ \quad \text{und} \quad d_1 = A * o_1^\$ = A * c_1 \quad \Rightarrow \quad r_1 = d_1^\$$$

$$c_2 = (A^T * r_1)^\$ \quad \text{und} \quad o_2 = A^T * d_1^\$ = A^T * r_1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = o_2^\$$$

$$r_2 = (A * c_2)^\$ \quad \text{und} \quad d_2 = A * o_2^\$ = A * c_2 \quad \Rightarrow \quad r_2 = d_2^\$$$

Mathematische Analyse
OD Theorem Beweis

- Sinkhorn-Knopp sagt $\lim_{k \to \infty} \hat{C}_k = C$ $\lim_{k \to \infty} \hat{R}_k = R$
  existieren genau dann, wenn A vollständig unterstützt wird.
- Mit $\hat{C}_k = diag\{c_k\}$ $\hat{R}_k = diag\{r_k\}$ gilt
  $\lim_{k \to \infty} c_k = \lim_{k \to \infty} \hat{C}_k * e = C * e$ $\lim_{k \to \infty} r_k = \lim_{k \to \infty} \hat{R}_k * e = R * e$
  existieren genau dann, wenn A vollständig unterstützt wird.
- Folglich geht aus $c_k = o_k^\$$ $r_k = d_k^\$$ hervor, dass

  $\lim_{k \to \infty} o_k = \lim_{k \to \infty} c_k^\$ = C^{-1} * e$ $\lim_{k \to \infty} d_k = \lim_{k \to \infty} r_k^\$ = R^{-1} * e$

  existieren genau dann, wenn A vollständig unterstützt wird.

Mathematische Analyse Konvergenz

- Nicht jede OD Matrix wird vollständig unterstützt => keine Konvergenz => OD Ratings existieren nicht!
- Konvergenz der OD Matrix erzwingen → „cheating“
- kleine Zahl ε > 0 auf jedes Element in A addieren, sodass jedes Element > 0 => vollständig unterstützt!

$$A <--- A + \varepsilon * e * e^T > 0$$

- Feineres „cheaten“ (nicht auf Hauptdiagonale addieren):

$$A <--- A + \varepsilon * \left(e * e^T - I \right)$$

- Je kleiner ε, desto mehr Iterationen nötig → längere Laufzeit

Inhalt

- Entstehung
- OD Rating Methode
- Mathematische Analyse
- Anwendungsbeispiel

Anwendungsbeispiel

- Offense-Defense Rating Methode in Spielvorhersagen (game predictions)
- Tests mit NFL (32 Teams), NCAA Football (120 Teams, relativ wenige Spiele) und NCAA Basketball (341 Teams, ~30 Spiele/Saison) für mehrere Saisons
- „Foresight“ predictions: intuitiv
- „Hindsight“ predictions: nutzt Daten der ganzen Saison um Spieler der Saison vorherzusagen (eher theoretisch)

Anwendungsbeispiel NFL

	Colley	Keener	Massey	ODM	Colley	Keener	Massey	ODM
2001	57.92	58.69	60.23	60.62	72.97	72.97	69.88	69.88
2002	59.18	58.43	60.3	63.3	68.16	68.91	67.04	68.54
2003	63.3	58.05	64.04	61.05	75.66	73.78	71.91	72.28
2004	61.8	59.93	62.17	58.43	74.16	70.79	67.42	68.54
2005	61.8	62.55	65.17	64.04	73.03	75.66	75.28	76.4
2006	58.8	57.68	60.3	58.05	72.66	69.29	71.16	70.04
2007	66.67	62.55	68.16	68.91	75.66	76.03	73.41	72.28

Table 1: Foresight/Hindsight game prediction percentages for the NFL.

Anwendungsbeispiel NCAA Football

- „Foresight" für Regular Season (ab Woche 6, da keine pre-Season), nur Division I-A, zwischen I-A und I-AA entfernt)

	Colley	Keener	Massey	ODM	Colley	Keener	Massey	ODM
2003	66.3	70.29	69.62	69.18	82.04	76.72	77.38	76.05
2004	66.14	63.68	67.71	67.49	81.17	77.8	76.91	79.15
2005	67.34	64.21	67.79	64.43	81.66	77.63	76.06	74.27
2006	68.74	65.74	73.23	71.95	82.23	78.37	77.09	77.3
2007	67.1	68.82	69.89	68.6	79.35	76.77	77.42	75.48

Table 2: Foresight/Hindsight game prediction percentages for NCAA football.

Anwendungsbeispiel NCAA Basketball

- Größtes Beispiel, da mehrere Spiele/Woche
- „Foresight" ab Spieltag 26, da keine pre-Season

	Colley	Keener	Massey	ODM	Colley	Keener	Massey	ODM
2001	68.60	64.60	69.65	70.03	76.00	70.03	74.40	74.11
2002	69.02	64.79	70.13	70.03	75.97	70.42	74.50	74.37
2003	68.92	64.92	70.19	70.22	76.90	70.13	75.83	75.66
2004	68.65	65.27	70.50	70.12	76.27	70.65	74.99	74.97
2005	66.98	64.44	68.95	69.56	75.99	69.32	74.80	74.57
2006	68.37	64.84	70.02	69.69	76.37	69.88	74.83	74.77
2007	68.28	64.91	70.13	70.07	76.05	69.82	74.92	74.83

Table 3: Foresight/Hindsight game prediction percentages for NCAA basketball.

Anwendungsbeispiel CPU Time

	Colley	Keener	Massey	ODM $\epsilon = 10^{-3}$	ODM $\epsilon = 10^{-4}$	ODM $\epsilon = 10^{-5}$
2001	1.78125	162.90625	2.0625	0.90625	0.953125	0.9375
2002	1.5625	161.234375	2.015625	0.84375	0.921875	1.1875
2003	1.671875	167.609375	2.125	1.03125	1.0625	1.125
2004	1.796875	170.046875	2.09375	1.03125	0.90625	0.875
2005	1.84375	174.96875	2.03125	1.109375	1.03125	1.140625
2006	1.96875	181.5	2.1875	0.90625	0.953125	1.03125
2007	2.03125	207.09375	2.453125	1.140625	1.1875	1.203125

Table 4: Total cpu time (sec) for each of the methods on NCAA basketball.

	$\epsilon = 0.001$	$\epsilon = 0.0001$	$\epsilon = 0.00001$
2001	1576	1577	1577
2002	1690	1866	2174
2003	1622	2000	2619
2004	1515	1605	1745
2005	1748	1997	2402
2006	1421	1465	1532
2007	1555	1638	1776

Table 5: Total number of iterations used by ODM for each of the seasons on NCAA basketball.

Weitere Anwendungsbeispiele

- Individuelle Spielerauszeichnungen (berücksichtigt Offense + Defense)
- Anwendung seitens der Autoren: Netflix.com, Movie Rankings
  - Film i hat hohes Rating m_i, wenn „gute“ User (z.B. #Bewertungen > 1000) diesen hoch bewerten
  - User j hat hohes Rating u_j, wenn seine Movie-Ratings mit dem „echten“ Rating übereinstimmen

Fazit

- OD Rating Methode ist in „foresight predictions“ mindestens genauso gut wie andere Rating Methoden
- Verbraucht weniger Zeit als andere Rating Methoden
- nicht nur im Wettbewerbssport, auch in anderen Ranking-Anwendungen verwendbar
- Adaptivität mit anderen Statistiken
- Konvergenz garantiert

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Referenzen

- Anjela Y. Govan, Amy N. Langville and Carl D. Meyer. The offense-defense approach to ranking team sports, J. of Quantitative Analysis in Sports, 5 (2009), Article 4
- A. N. Langville and C. D. Meyer. Who's #1:The Science of Rating and Ranking
- Anjela Y. Govan. Ranking Theory with Application to Popular Sports. Ph. D. Thesis, North Carolina State University, 2008.