

Künstliche Intelligenz

Übungsblatt #5 Schließen unter Unsicherheit Version 1.3

Prof. Dr. J. Fürnkranz, Dr. G. Grieser

Aufgabe 5.1

Ein Patient weiß folgendes über einen bestimmten Krebstest: Falls jemand Krebs hat, ist der Test in 98% der Fälle korrekt. Falls jemand keinen Krebs hat, ist der Test in 97% der Fälle korrekt. Insgesamt haben 0,8% der gesamten Bevölkerung Krebs.

Der Patient erhält nun die Nachricht, daß sein Test positiv ist. Was sagt ihm das?

Lösungsvorschlag:

Der Patient möchte natürlich wissen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass er mit der positiven Testvorhersage auch wirklich Krebs hat. Wir kodieren nun folgendes:

- $+$ \equiv Test ist positiv (sagt Krebs vorher)
- $-$ \equiv Test ist negativ (sagt keinen Krebs vorher)
- K \equiv Krebs vorhanden
- $\neg K$ \equiv Krebs nicht vorhanden

Bekannt sind folgende Wahrscheinlichkeiten:

- $\Pr(K) = 0,008 \Rightarrow \Pr(\neg K) = 0,992$
(Wahrscheinlichkeit für Krebs und keinen Krebs in der gesamten Bevölkerung)
- $\Pr(+|K) = 0,98 \Rightarrow \Pr(-|K) = 0,02$
(Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ist, wenn jemand Krebs hat & Wahrscheinlichkeit, dass der Test negativ ist, wenn jemand Krebs hat)

- $\Pr(-|\neg K) = 0,97 \Rightarrow \Pr(+|\neg K) = 0,03$
(Wahrscheinlichkeit, dass der Test negativ ist, wenn jemand keinen Krebs hat & Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ist, wenn jemand keinen Krebs hat)

Der Patient ist an $\Pr(K|+)$ interessiert. Wir wenden das Bayes'sche Theorem an und erhalten:

$$\Pr(K|+) = \Pr(+|K) \cdot \Pr(K) / \Pr(+),$$

wobei alle Werte bis auf $\Pr(+)$ bekannt sind. Diese Wahrscheinlichkeit können wir mit dem Theorem der totalen Wahrscheinlichkeiten berechnen, da sich die Ereignisse K (Krebs vorhanden) und $\neg K$ (Krebs nicht vorhanden) wechselseitig ausschließen. Das Theorem läßt sich in unserem Fall wie folgt anwenden:

$$\begin{aligned} \Pr(+)&= \Pr(+|K) \cdot \Pr(K) + \Pr(+|\neg K) \cdot \Pr(\neg K) \\ &= 0,98 \cdot 0,008 + 0,03 \cdot 0,992 = 0,0376 \end{aligned}$$

Nun können wir weiterrechnen:

$$\begin{aligned} \Pr(K|+) &= 0,98 \cdot 0,008 / 0,0376 = 0,2085 \\ \Rightarrow \Pr(\neg K|+) &= 0,7915 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2

Betrachten Sie das *Monty-Hall-Problem* (auch Ziegenproblem genannt):

Bei einer Spielshow soll der Kandidat eines von drei aufgebauten Toren auswählen. Hinter einem verbirgt sich der Gewinn, ein Auto, hinter den anderen beiden jeweils eine Ziege, also Nieten (oder Trostpreise). Folgender Spielablauf ist immer gleich und den Kandidaten vorab bekannt:

- Der Kandidat wählt ein Tor aus, welches aber vorerst verschlossen bleibt.
- Daraufhin öffnet der Moderator, der die Position des Gewinns kennt, eines der beiden nicht vom Kandidaten ausgewählten Tore, und zwar eines, hinter dem sich eine Ziege befindet. Im Spiel befinden sich also noch ein Gewinn und eine Niete.
- Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere Tor zu wählen.

Wie soll der Kandidat sich entscheiden, um seine Gewinnchance zu maximieren?

Lösungsvorschlag:

Eine gute Erklärung findet sich in der Wikipedia:

http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem

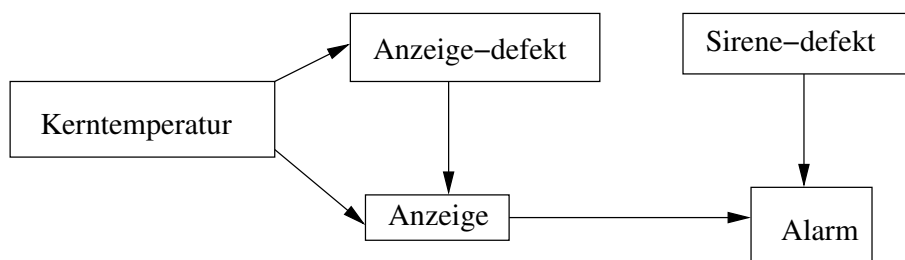
Aufgabe 5.3

In einer Nuklearfabrik wird ein Alarm ausgelöst, sobald eine Temperaturanzeige einen bestimmten Wert überschreitet. Die Temperaturanzeige mißt die Temperatur des Schmelzkernes. Betrachten Sie die folgenden Variablen:

- *Alarm* (boolesch): wahr, wenn der Alarm ausgelöst wird
- *Sirene-defekt* (boolesch): wahr, wenn das Alarmsystem (d.h. die Sirene) defekt ist
- *Anzeige* (numerisch): der Wert, der als Temperatur angezeigt wird
- *Anzeige-defekt* (boolesch): wahr, wenn die Temperaturanzeige defekt ist
- *Kerntemperatur* (numerisch): die tatsächliche Temperatur im Schmelzkern

- a) Geben Sie ein Bayessches Netz an. Nehmen Sie hierbei an, daß die Anzeige bei zunehmender Kerntemperatur immer störanfälliger wird.

Lösungsvorschlag:



- b) Nehmen wir an, es gäbe nur zwei tatsächliche und angezeigte Temperaturwerte (nennen wir sie *normal* und *hoch*). Die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzeige korrekt funktioniert sei 75%, falls sie nicht defekt ist. Falls die Anzeige defekt ist, so arbeitet sie in 30% der Fälle korrekt. Geben Sie die Tabelle der bedingten Wahrscheinlichkeiten für *Anzeige* an.

Lösungsvorschlag:

<i>Anzeige</i>	Kerntemperatur = normal		Kerntemperatur = hoch	
	Anzeige-defekt = true	Anzeige-defekt = false	Anzeige-defekt = true	Anzeige-defekt = false
Anzeige = normal	0,3	0,75	0,7	0,25
Anzeige = hoch	0,7	0,25	0,3	0,75

- c) Nehmen wir an, die Sirene würde korrekt arbeiten, solange sie nicht defekt ist; in diesem Fall wird nie ein Alarm ausgelöst. Geben Sie die Tabelle der bedingten Wahrscheinlichkeiten für *Alarm* an.

Lösungsvorschlag:

<i>Alarm</i>	Anzeige = normal		Anzeige = hoch	
	Alarm-defekt = true	Alarm-defekt = false	Alarm-defekt = true	Alarm-defekt = false
Alarm = true	0	0	0	1
Alarm = false	1	1	1	0

- d) Nehmen Sie an, daß der Kern in 1% der Fälle eine hohe Temperatur hat. Nun wird ein Alarm ausgelöst, wobei sowohl die Anzeige als auch die Sirene fehlerfrei arbeiten. Außerdem wissen wir, daß die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzeige korrekt arbeitet, 100% beträgt. Auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Sirene korrekt arbeitet ist 100%.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß die Kerntemperatur zu hoch ist.

Lösungsvorschlag:

Wir benutzen folgende Abkürzungen:

$K \rightarrow$ Kerntemperatur, $k \rightarrow$ Kerntemperatur=normal, $\neg k \rightarrow$ Kerntemperatur=hoch

$A \rightarrow$ Anzeige, $a \rightarrow$ Anzeige=normal, $\neg a \rightarrow$ Anzeige=hoch

$S \rightarrow$ Alarm, $s \rightarrow$ Alarm=true, $\neg s \rightarrow$ Alarm=false

$D_a \rightarrow$ Anzeige-defekt, $d_a \rightarrow$ Anzeige-defekt=true, $\neg d_a \rightarrow$ Anzeige-defekt=false

$D_s \rightarrow$ Sirene-defekt, $d_s \rightarrow$ Sirene-defekt=true, $\neg d_s \rightarrow$ Sirene=false

Wir benutzen die Aufzählungsmethode. K ist also unsere Queryvariable und S , D_a und D_s sind die Evidenzvariablen.

- Berechnen wir zunächst den Wert dafür, daß die Kerntemperatur normal ist, d.h. $p(k|s, \neg d_s, \neg d_a)$. Aus der Struktur des Netzes und damit des Wissens über die bedingten Unabhängigkeiten erhalten wir zunächst:

$$\alpha \cdot P(k) \cdot P(A|k, \neg D_a) \cdot P(\neg D_a|k) \cdot P(S|A, \neg D_s) \cdot P(\neg D_s)$$

Da die Variablen S , D_a und D_s gegeben sind (d.h. dies sind unsere Evidenzvariablen) erhalten wir

$$\alpha \cdot P(k) \cdot P(A|k, \neg d_a) \cdot P(\neg d_a|k) \cdot P(s|A, \neg d_s) \cdot P(\neg d_s)$$

Da die Anzeige zwei Möglichkeiten (normal und hoch) annehmen kann, müssen wir diese beiden Fälle betrachten:

$$\alpha \cdot \left(\begin{array}{c} p(k) \cdot p(a|k, \neg d_a) \cdot p(\neg d_a|k) \cdot p(s|a, \neg d_s) \cdot p(\neg d_s) \\ + \\ p(k) \cdot p(\neg a|k, \neg d_a) \cdot p(\neg d_a|k) \cdot p(s|\neg a, \neg d_s) \cdot p(\neg d_s) \end{array} \right)$$

Aus den CPT können wir die entsprechenden Werte ablesen:

$$\alpha \cdot (0,99 \cdot 1 \cdot 0,75 \cdot 0 \cdot 1 + 0,99 \cdot 1 \cdot 0,25 \cdot 1 \cdot 1) = \alpha \cdot 0,2475$$

- Analog wird der Wert dafür berechnet, daß die Kerntemperatur hoch ist, d.h. $p(\neg k|s, \neg d_s, \neg d_a)$:

$$\alpha \cdot \left(\begin{array}{c} p(\neg k) \cdot p(a|\neg k, \neg d_a) \cdot p(\neg d_a|\neg k) \cdot p(s|a, \neg d_s) \cdot p(\neg d_s) \\ + \\ p(\neg k) \cdot p(\neg a|\neg k, \neg d_a) \cdot p(\neg d_a|\neg k) \cdot p(s|\neg a, \neg d_s) \cdot p(\neg d_s) \end{array} \right)$$

$$\alpha \cdot (0,01 \cdot 1 \cdot 0,25 \cdot 0 \cdot 1 + 0,01 \cdot 1 \cdot 0,75 \cdot 1 \cdot 1) = \alpha \cdot 0,0075$$

Somit ergibt sich $P(K|s, \neg d_s, \neg d_a) = \alpha \langle 0,2475; 0,0075 \rangle$, durch Normalisieren erhalten wir $\langle 0,9706; 0,0294 \rangle$, d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp 3% ist die Kerntemperatur hoch.